nta

Vorlesung Mathematik I

Wiederholungseinheit „Differentialrechnung“

Prof. Dr. Axel Hoff

nta-Hochschule Isny
Fachgebiete Datenanalyse, Mathematik, Modellbildung und Simulation
Lehrgebiet Ingenieur-Mathematik

Wintersemester 2005 / 2006

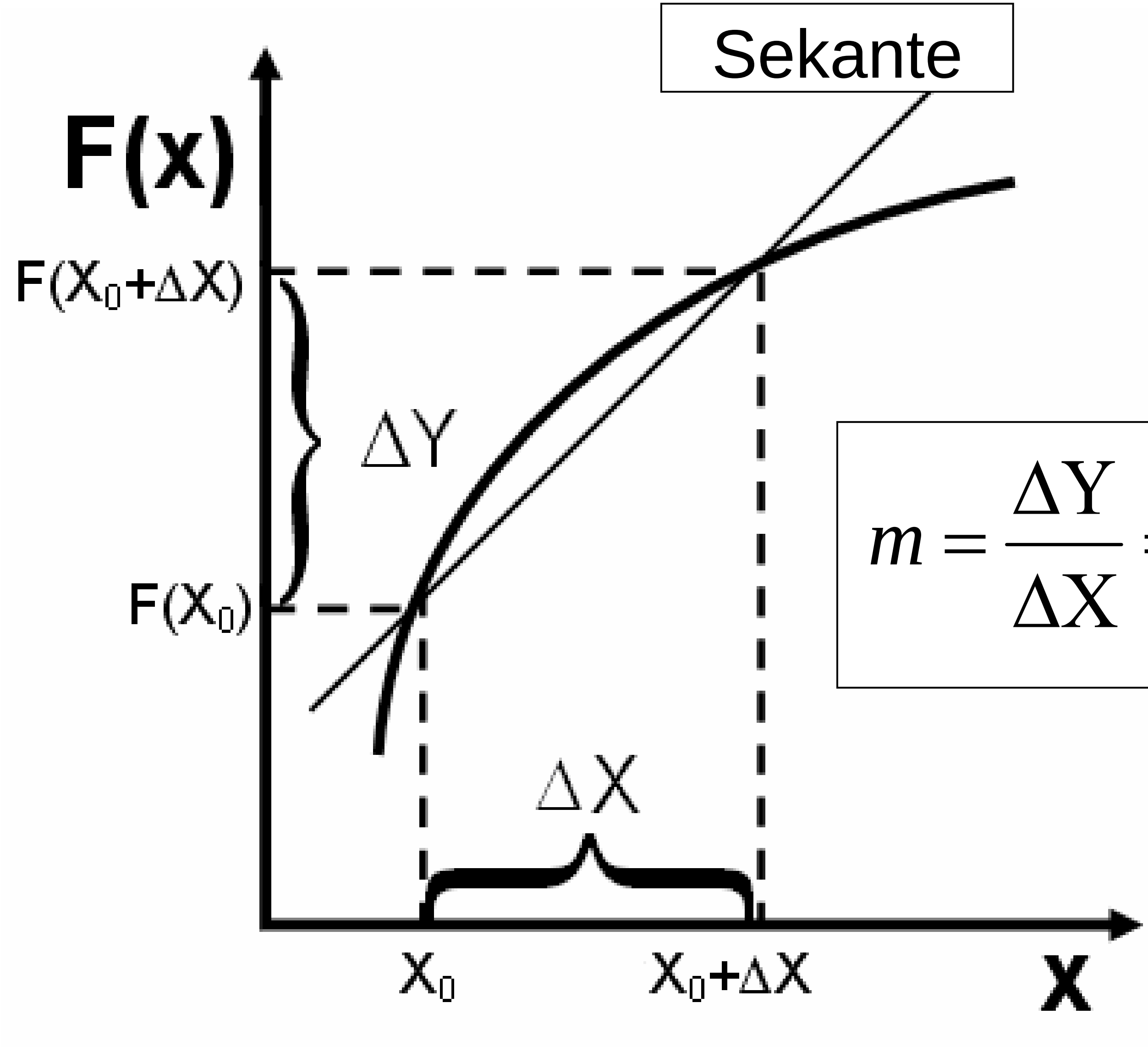
Timo Meyer

Differentialrechnung:

I. Differenzenquotient
II. Differentialquotient
III. Ableitung
IV. Ableitungen wichtiger Funktionen
V. Differentiationsregeln
VI. Ableitung der Umkehrfunktion
VII. Höhere Ableitungen
VIII. Extrema und Wendepunkte
IX. Symmetrie

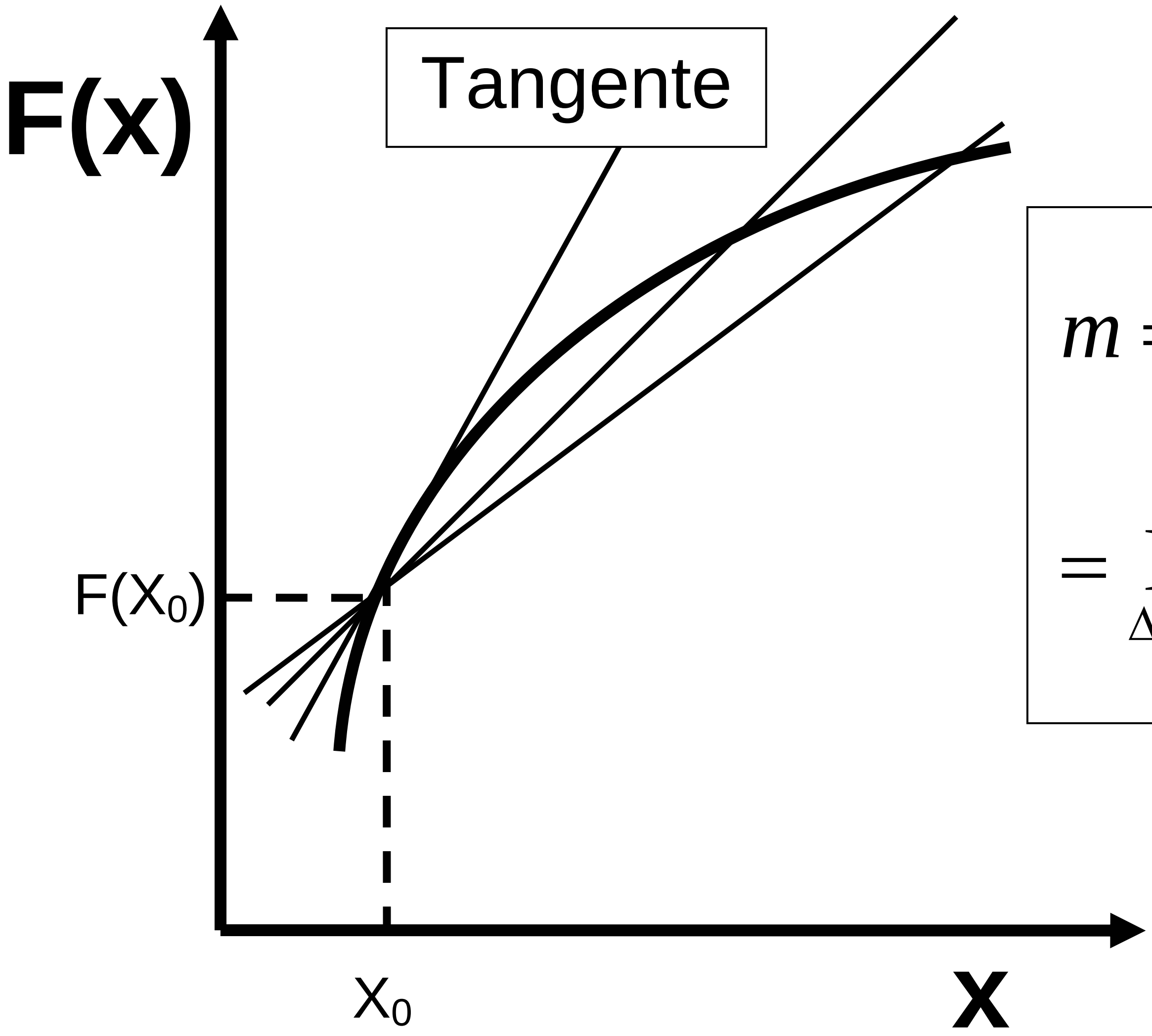
I. Diffenzenquotient:

Sekantensteigung *m*



$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{F\left(X_0 + \Delta X\right) - F\left(X_0\right)}{\Delta X}$$

II. Differentialquotient: **Tangentensteigung *m***



$$m = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta \mathrm{X}}$$

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F\left(X_0 + \Delta \mathrm{X}\right) - F\left(X_0\right)}{\Delta \mathrm{X}}$$

III. Ableitung:

$$\frac{dF(X)}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F\left(X_0 + \Delta X\right) - F\left(X_0\right)}{\Delta X}$$

Eine Funktion nach einer Variablen zu differenzieren heißt, ihre Ableitung zu bilden, indem man obigen Differentialquotienten berechnet.

Schreibweise:

$$\frac{dF(X)}{dX} = F'(X)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}(t)$$

Eine Funktion wird in ihre Ableitung bezgl. einer Variablen überführt, also differenziert, indem man den **Differentialoperator** auf sie anwendet.

$$\text{Differentialoperator}: \frac{d}{dx}$$

Der Differentialoperator wird auf eine Funktion $y(x)$ angewendet (er steht links vor der Funktion):

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \cdot y(x) \equiv \frac{dy}{dx}$$

Geometrische Interpretation der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle ist die Steigung der Tangente in diesem Punkt.

Physikalische Interpretation der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ gibt Antwort auf die Frage: Wie verändert sich y mit x.

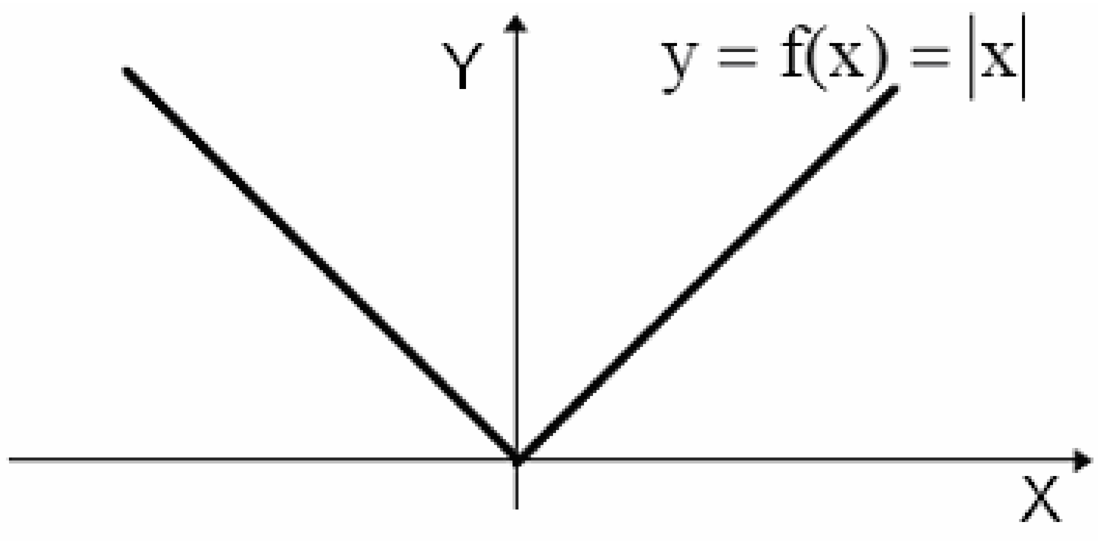
Geschwindigkeit:	Wie verändert sich der Ort mit der Zeit ?	$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$
Reaktionsgeschwindigkeit:	Wie verändert sich die Konzentration mit der Zeit ?	$\boxed{v = \frac{dc}{dt} = \dot{c}}$
Ausdehnungskoeffizient:	Wie verändert sich das Volumen mit der Temperatur ?	$\boxed{\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dT}}$
Kompressibilität:	Wie verändert sich das Volumen mit dem Druck ?	$\boxed{\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}}$
Kraft:	Wie verändert sich die potentielle Energie entlang einer Wegstrecke ?	$\boxed{F = -\frac{dE_{pot}}{ds}}$

Existenz der Ableitung

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn für alle Funktionswerte die Ableitung existiert, also der Differentialquotient an allen Punkten eindeutig berechnet werden kann.
An jedem Punkt der Kurve ist somit eindeutig eine Tangente konstruierbar.

Gegenbeispiel:

Die Betragsfunktion $y = |x|$ ist
in x_0 nicht differenzierbar (Knick!)
Links- und rechtsseitige
Ableitungen sind verschieden.



Beispiele:

$$\boxed{y = F(x) = x^2}$$

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{F\left(x+\Delta x\right) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\left(x+\Delta x\right)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(2x + \Delta x\right) = \underline{\underline{2x}}$$

$$\boxed{y = F(x) = e^x}$$

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{F\left(x+\Delta x\right) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 = \underline{\underline{e^x}}$$

IV. Ableitungen wichtiger Funktionen:

$F(x)$	$F'(x)$
C	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$F(x)$	$F'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Wichtige Funktionen[1] : Sinus, Cosinus und Tangens

$f_1 = \sin(x)$ $f_2 = \cos(x)$ $f_3 = \tan(x)$ Polstelle nur für Tangens

[1] Erstellt mit dem Shareware-Programm „MatheAss“: http://www.matheass.de/matheass_de/download.htm

V. Differentiationsregeln:

$$\left(f+g\right)' = f' + g'$$

Summenregel

$$\left(f \cdot g\right)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Produktregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Quotientenregel

$$\left(f\left[u(x)\right]\right)' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Kettenregel

äußere Ableitung

innere Ableitung

Die Definition von $u(x)$ ist beliebig. Es muss so gewählt werden, dass aus $f(u)$ eine einfache Funktion wird.

Das formale Erweitern des Differentialquotienten kann auch in mehreren Stufen erfolgen:

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}}$$

Beispiele:

Summenregel

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

Produktregel

$$f(x) = x^3 \cdot 3^x \rightarrow$$

$$u(x) = x^3 \qquad v(x) = 3^x$$

$$u'(x) = 3x^2 \qquad v'(x) = (\ln 3) * 3^x$$

$$\underline{\underline{f'(x) = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot 3^x \cdot \ln(3)}}$$

Quotientenregel

$$\Phi(\varphi) = \tan(\varphi) \rightarrow$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$f(\varphi) = \sin(\varphi) \qquad g(\varphi) = \cos(\varphi)$$

$$f'(\varphi) = \cos(\varphi) \qquad g'(\varphi) = -\sin(\varphi)$$

$$\Phi'(\varphi) = \frac{\cos^2(\varphi) - [-\sin^2(\varphi)]}{\cos^2(\varphi)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(\varphi)}}}$$

Man erhält die Abfolge der Funktion von „innen“ nach „außen“, indem man sich vorstellt, die Funktion mit einem Taschenrechner zu berechnen.

Beispiel:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\cos\left(x^2 + 4\right)}\right)$$

Kettenregel

1.	Berechne	$x^2 + 4$	innerste Funktion
2.	Berechne den	$\cos(\ )$	
3.	Berechne die	Wurzel	
4.	Berechne den	$\ln(\ )$	äußerste Funktion

Die Kettenregel kann von innen nach außen oder von außen nach innen angewendet werden.

Die Vorgehensweise von außen nach innen ist oft leichter:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\cos\left(x^2+4\right)}\right)$$

„arg“ ist das jeweilige Funktionsargument

1. Ableitung des *ln (arg)* ist *1 / (arg)*
2. Ableitung der Wurzel ist 1 geteilt durch zweimal die Wurzel
3. Ableitung des *cos(arg)* ist – *sin(arg)*
4. Ableitung von x^2+4 ist $2x$
5. Alle Ableitungen werden miteinander multipliziert

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\cos\left(x^2+4\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(x^2+4\right)}} \cdot \left[-\sin\left(x^2+4\right)\right] \cdot 2x$$

$$= -\frac{x \cdot \sin\left(x^2+4\right)}{\cos\left(x^2+4\right)} = \underline{\underline{-x \cdot \tan\left(x^2+4\right)}}$$

Formale Anwendung der Kettenregel:

$$f(x) = \ln\left(\underbrace{\sqrt{\underbrace{\cos\left(\underbrace{x^2+4}_{u=x^2+4}\right)}_{v=\cos(u)}}}_{w=\sqrt{v}} \right)$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dv}{du} = -\sin(u)$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{u}}$$

$$\boxed{f(x) = \ln(w) = \ln(w\{v[u(x)]\}\ )} \longrightarrow \boxed{\frac{df}{dw} = \frac{1}{w}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

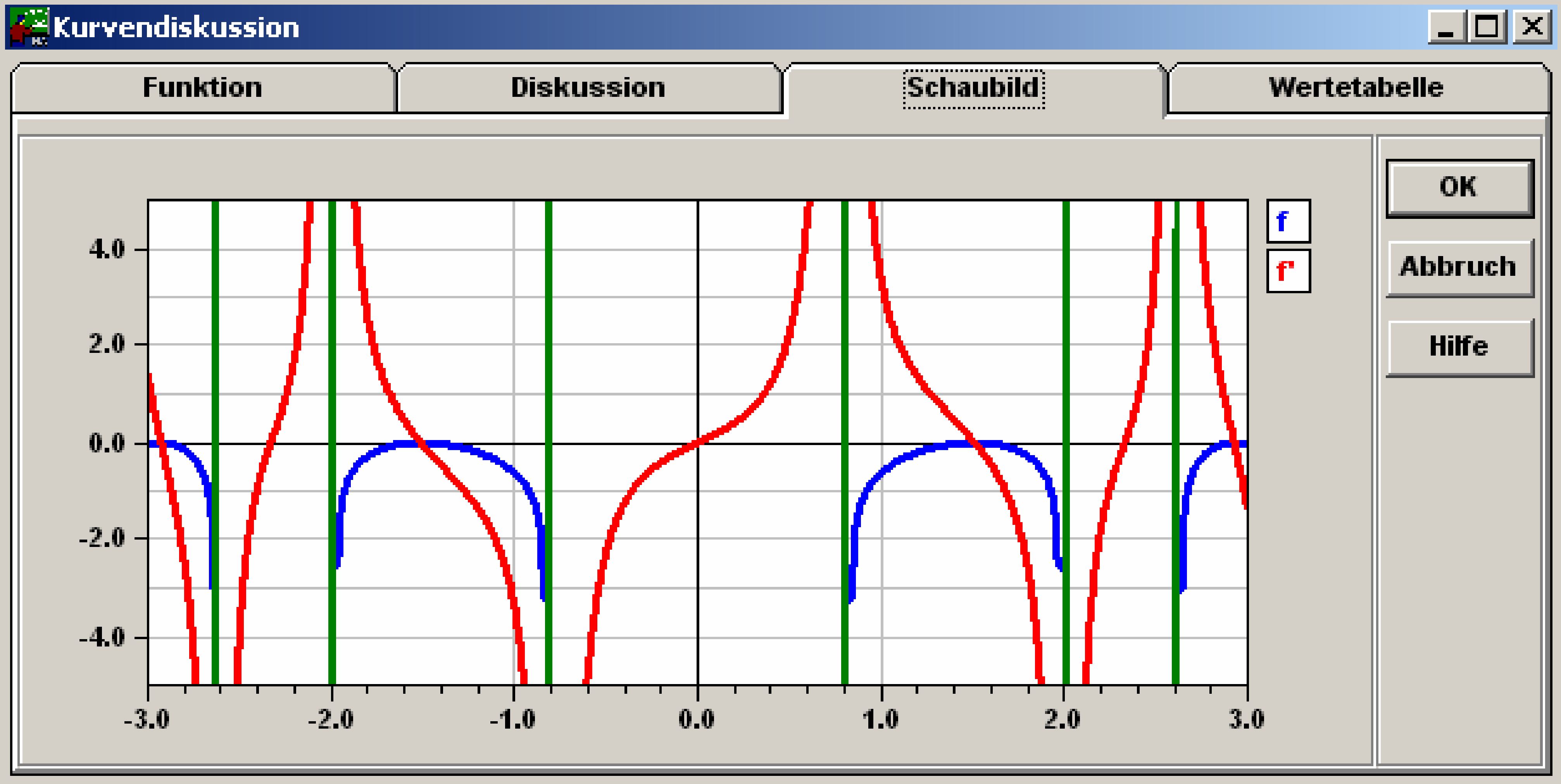
$$= -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{v}} \cdot \sin\left(x^2 + 4\right) \cdot 2x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \sin\left(x^2 + 4\right) \cdot x$$

$$= -\frac{x \cdot \sin\left(x^2 + 4\right)}{\cos\left(x^2 + 4\right)}$$

$$= \underline{\underline{-x \cdot \tan\left(x^2 + 4\right)}}$$

Beispiel einer verketteten Funktion mit Ableitung[2] :



y = ln(sqrt(cos(x^2+4)))   y’ = -x*tan(x^2+4)   Polstelle

[2] Erstellt mit dem Shareware-Programm „MatheAss“: http://www.matheass.de/matheass_de/download.htm

Einfache Beispiele zur Kettenregel:

$$f(x) = (ax+b)^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot (ax+b)^{n-1} \cdot a$$

$$f(x) = \sin(kx) \longrightarrow f'(x) = \cos(kx) \cdot k$$

$$f(x) = \exp(-kx) \longrightarrow f'(x) = \exp(kx) \cdot (-k)$$

$$f(x) = \ln(a \cdot x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{a \cdot x} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Berechnung der Ableitung von $y = a^x$:

$$y = a^x \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = x \cdot \ln(a) \quad \Rightarrow \quad y = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$\boxed{y' = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \underline{\underline{\ln(a) \cdot a^x}}}$$

Implizites Differenzieren

- Gegeben sei die Gleichung $F(x|y)=0$, wobei y noch von x abhängt.
- Häufig kann man diese Gleichung nicht nach $y(x)$ auflösen, sodass man die Ableitung y' nicht direkt bilden kann.
- In diesem Fall hilft es $F(x|y)$ implizit zu differenzieren und dann die Gleichung nach y' aufzulösen.
- Beim implizierten Differenzieren wird F nach x abgeleitet, wobei für die Ableitung von Funktionen von y die Kettenregel benutzt wird.
- Auch bei Ausdrücken, die sich nach $y(x)$ auflösen lassen, ist die implizite Ableitung oft einfacher als die explizite zu berechnen.

Beispiele:

$$\boxed{y = x^2; \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = \underline{\underline{2x}}}$$

$$4x + 2y = x^2 - 1$$

$$\frac{d(4x)}{dx} + \frac{d(2y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{d(1)}{dx}$$

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot y' = 2x - 0$$

$$y' = \underline{\underline{x - 2}}$$

Logarithmisches Differenzieren

$$\frac{d \cdot \ln(x)}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y}$$

Funktionen lassen sich oft leichter differenzieren, wenn man sie vorher logarithmiert und anschließend implizit ableitet.

$$y = x^x \quad \Rightarrow \quad LOGARITHMIEREN$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$y = e^{x \cdot \ln x} = e^z \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln x = z$$

$$\frac{dy}{dz} = e^z = x^x \quad \Rightarrow \quad e^z = y = x^x$$

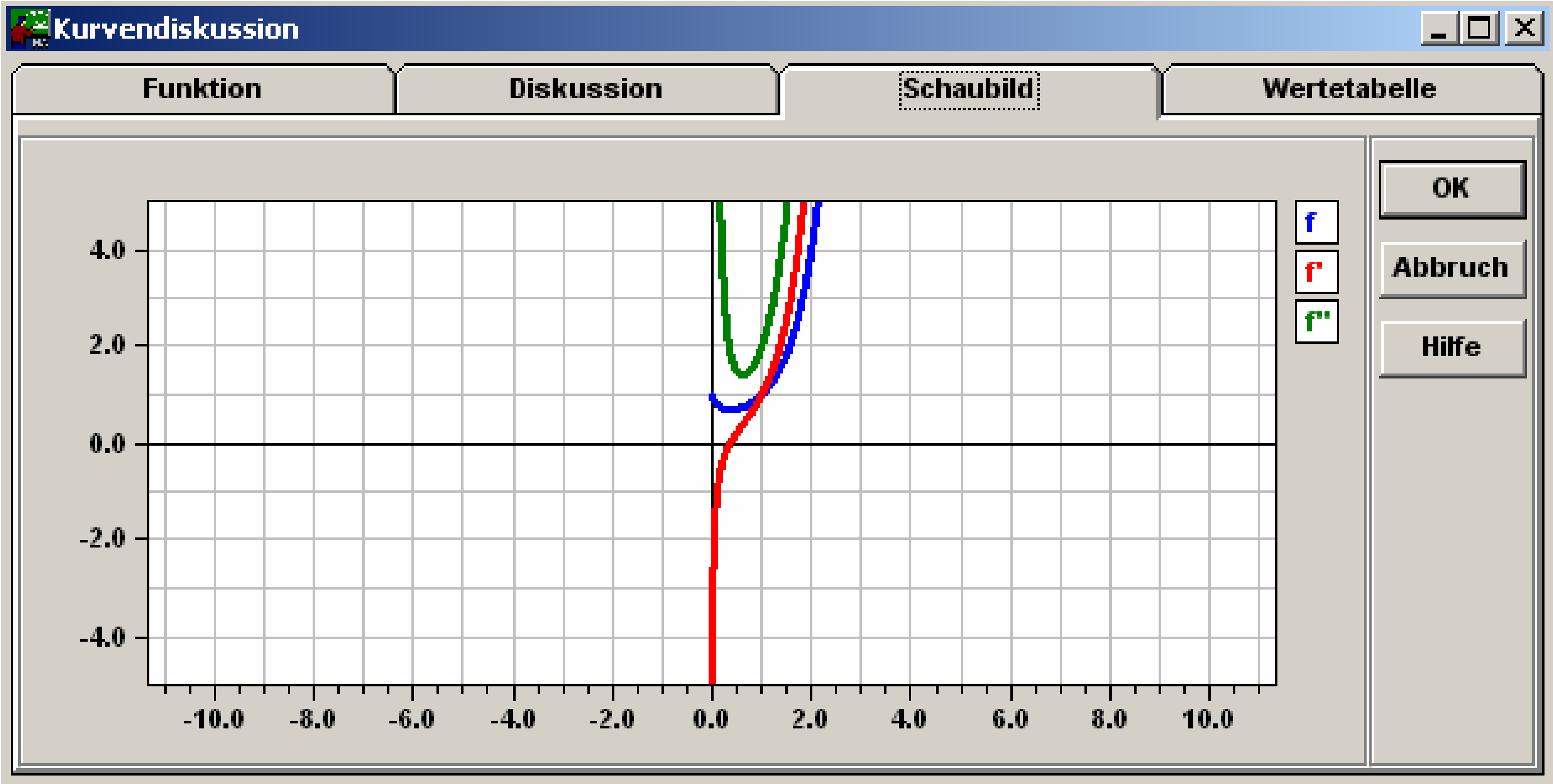
$$z = x \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad z = u \cdot v$$

$$\frac{dz}{dx} = u \cdot v' + u' \cdot v = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = x^x (1 + \ln x)$$

$$\boxed{y = x^x; \quad \Rightarrow \quad y' = x^x (1 + \ln x)}$$

Beispiel einer Funktionsskizze für logarith. Differenzieren[3] :



y = x^x   y’ = x^x*[1+ln(x)]   y’’ = [(1+ln(x))^2*x^x]+x^(x-1)

[3] Erstellt mit dem Shareware-Programm „MatheAss“: http://www.matheass.de/matheass_de/download.htm

Differentiale:

- Die infinitesimalen Größen *dx* und *d*y heißen **Differentiale**. Mit Differentialen kann „normal“ gerechnet werden.

- Das Einsetzen von Zahlen in die infinitesimalen Größen *dx* und *dy* ist nicht erlaubt.

- Beide Differentiale *dx* und *dy* konvergieren gegen Null, der Quotient ist aber in der Regel endlich!

- Differentiale können ineinander umgerechnet werden:

$$\boxed{y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy = y'(x) \cdot dx}$$

dy kann aus *dx* berechnet werden

VI. Ableitung der Umkehrfunktion:

$$u = f(x) \qquad x = f^{-1}(u)$$

$$f' = \frac{du}{dx} \qquad f^{-1'} = \frac{dx}{du}$$

$$f^{-1'} = \frac{1}{f'} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1'} \cdot f' = 1$$

Beispiel:

$$u = e^{-x} \qquad x = \ln(u)$$

$$u' = \frac{du}{dx} = -e^{-x} = -u \qquad x' = \frac{dx}{du} = -\frac{1}{u}$$

$$u' \cdot x' = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = -u \cdot \left(-\frac{1}{u} \right) = 1$$

1. Beispiel einer Umkehrfunktion[4] :

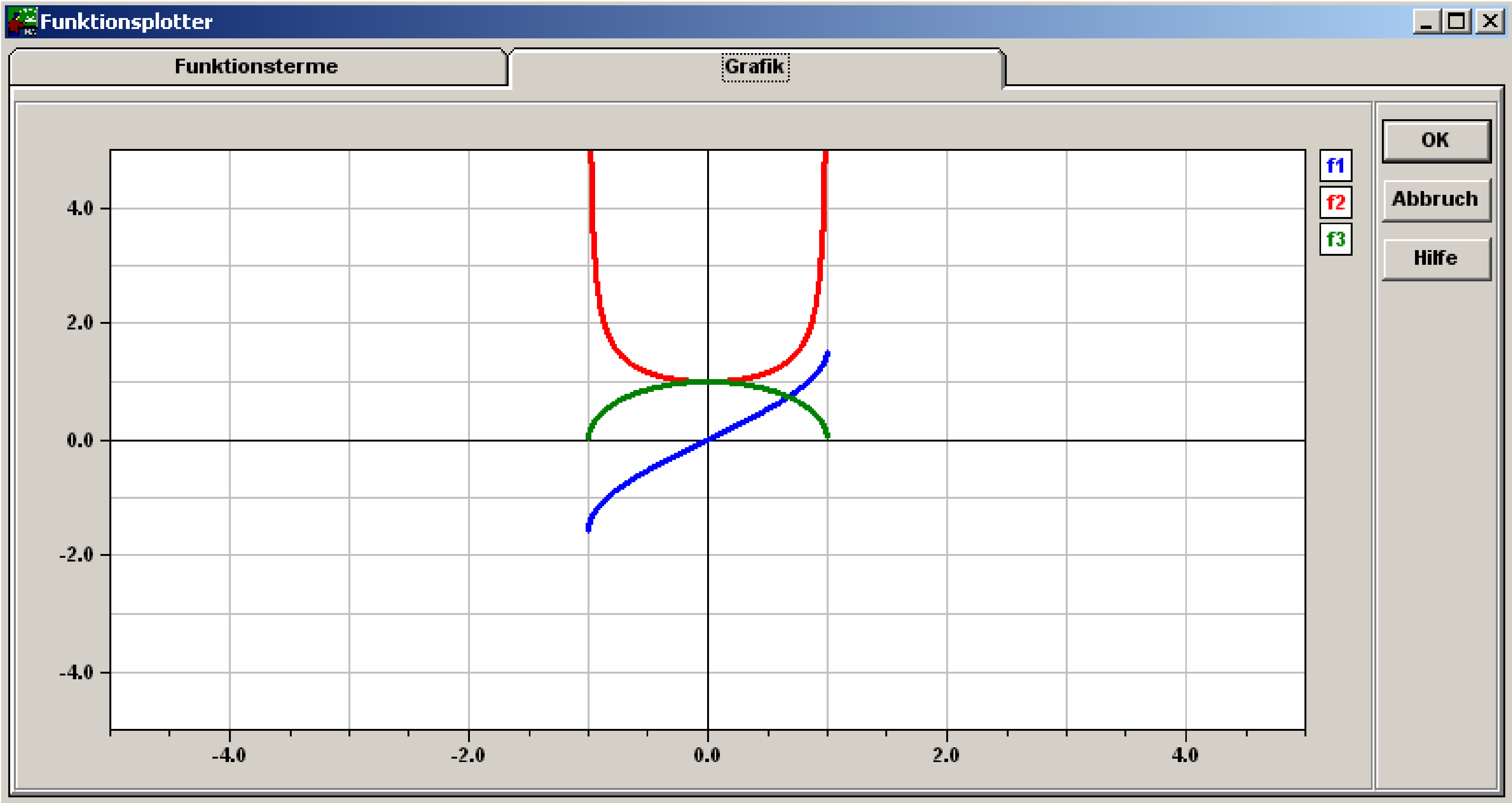
u = exp(-x) u' = - exp(-x) x = ln(u) x' = -1/u Umkehrfunktion u'*x'= 1

[4] Erstellt mit dem Shareware-Programm „MatheAss“: http://www.matheass.de/matheass_de/download.htm

Beispiel: Ableitung der Funktion $y = arcsin(x)$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{y = \arcsin(x)} \arrow[r] \arrow[dd, dashed] & \boxed{x = \sin(y)} \arrow[d] \\
 & \boxed{\dfrac{dx}{dy} = \cos(y)} \arrow[d] \\
\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} & \boxed{\dfrac{dx}{dy} = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-x^2}} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

2. Beispiel einer Umkehrfunktion[5] :



y = arcsin(x)   y’ = 1/sqrt(1-x^2)   Umkehrfunktion y’$^{-1}$ = sqrt(1-x^2)/1

[5] Erstellt mit dem Shareware-Programm „MatheAss“: http://www.matheass.de/matheass_de/download.htm

VII. Höhere Ableitungen:

Mehrfaches Anwenden des Differentialoperators:

$$\boxed{y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\big(f'(x)\big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right)y = \frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Allgemeine Form:

$$\boxed{\begin{aligned} y^{(n)} &= f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right) = \frac{d^n y}{dx^n} \end{aligned}}$$

☠ Vorsicht ! ☠

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \neq \frac{d^2 y}{dx^2}$$

VIII. Extrema und Wendepunkte:

Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ gibt ihre Steigung, die zweite Ableitung ihre Krümmung an.

Maximum:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{\max}} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 y(x_{\max})}{dx^2} < 0$$

Minimum:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{\min}} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2 y(x_{\min})}{dx^2} > 0$$

Wendepunkt:

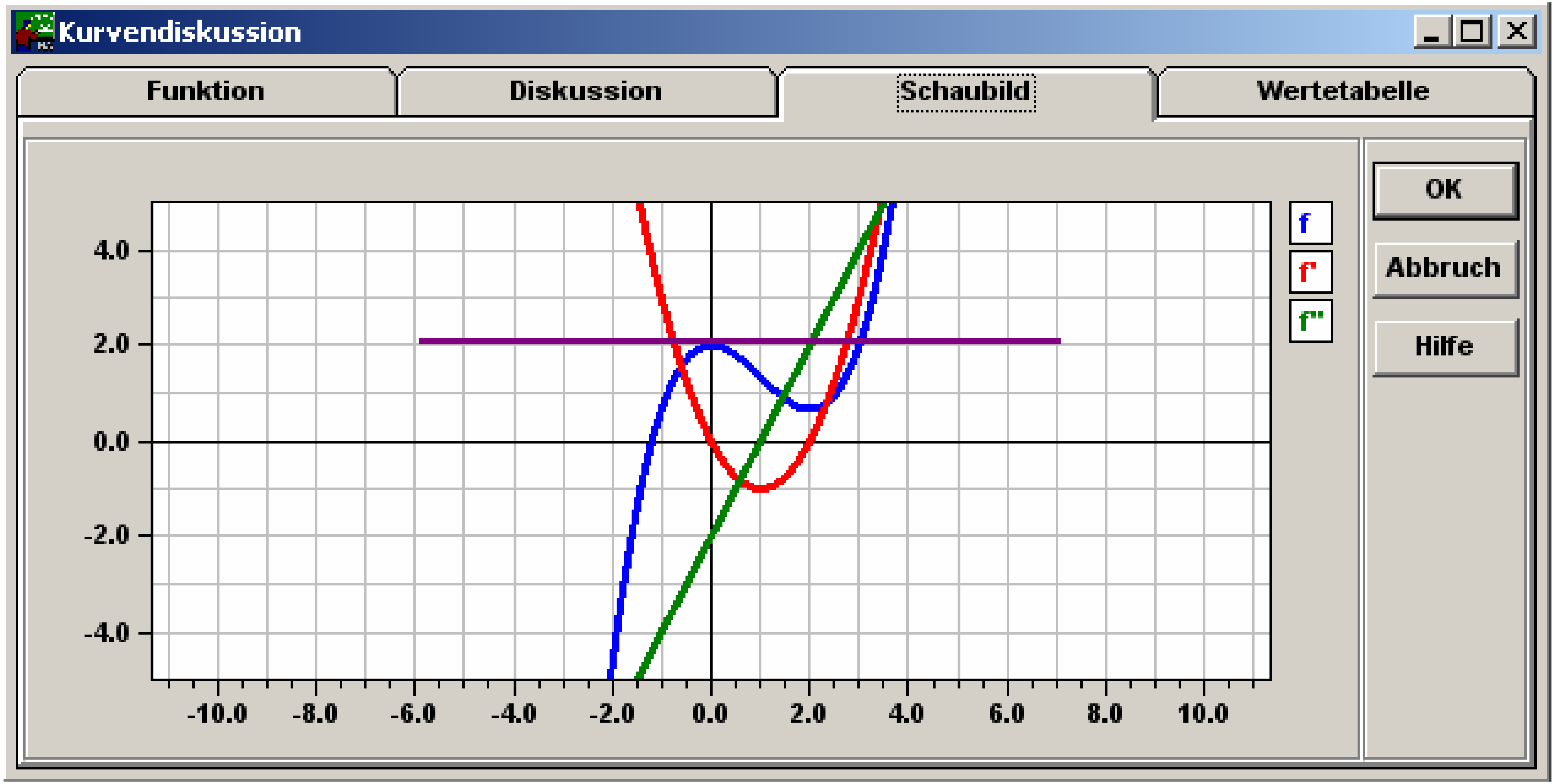
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{wend}} \neq 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 y(x_{wend})}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{d^3 y(x_{wend})}{dx^3} \neq 0 \end{cases}$$

Ein Sattelpunkt ist ein Spezialfall eines Wendepunkts, welcher eine horizontale Tangente besitzt.

Sattelpunkt:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{sattel}} = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 y(x_{sattel})}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{d^3 y(x_{sattel})}{dx^3} \neq 0 \end{cases}$$

Beispiel einer Kurvendiskussion[6] :



y = (1/3)*x^3-x^2+2 y' = x^2-2x y'' = 2x-2 y''' = 2

[6] Erstellt mit dem Shareware-Programm „MatheAss“: http://www.matheass.de/matheass_de/download.htm

IX. Symmetrie

Ist $G(x)$ eine Funktion gerader Symmetrie und $U(x)$ eine Funktion ungerader Symmetrie, so gilt:

$$\frac{dU(x)}{dx} = G(x) \qquad \frac{dG(x)}{dx} = U(x)$$

- Ungerader Exponent = punktsymmetrisch, zentralsymmetrisch
- Gerader Exponent = spiegelsymmetrisch, axialsymmetrisch

$y = x^2$	ist axialsymmetrisch zur y-Achse
$y = x^3$	ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

nta