Partielle Integration

Aus der Produktregel für das Differenzieren ergibt sich:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\Leftrightarrow \int (u \cdot v)' = \int u'v + \int uv'$$

$$\Leftrightarrow uv = \int u'v + \int uv'$$

Regel für die partielle Integration

$$\boxed{\int u'v = uv - \int uv'}$$

Formal schöner und mit Grenzen ergibt sich:

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Rezept

Zunächst muss man die zu integrierende Funktion in ein Produkt zerlegen. Nun gibt es zwei Möglichkeiten für die Wahl von u´ und v, eine führt zum Ziel, die andere (meistens) auf den Holzweg. Die richtige Möglichkeit u´ und v auszuwählen ist in der Regel die größte Schwierigkeit bei der partiellen Integration. Dabei sollte man sich daran erinnern, was man erhält, wenn man die Regel der partiellen Integration angewendet hat. Es bleiben zwei Ausdrücke zu bestimmen: uv und $\int uv'$. uv erfordert kein Integrieren mehr, $\int uv'$ ist dagegen wieder ein Integral und ist daher schwieriger zu bestimmen. Man muss nun u´ und v so bestimmen, dass dieses Integral möglichst einfach wird. Dies sei an ein paar Beispielen gezeigt:

Beispiele

1. <u>Typ: „Abräumen“</u>

$$\int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\left(2 - x^2\right)}_{v} dx$$

$$= e^x\left(2 - x^2\right) - \int e^x(-2x)dx$$

$$= e^x\left(2 - x^2\right) + \int 2xe^x dx$$

$$= e^x\left(2 - x^2\right) + e^x 2x - \int 2e^x dx$$

$$= e^x\left(2 - x^2\right) + e^x 2x - 2e^x$$

$$= e^x\left(2 - x^2 + 2x - 2\right)$$

$$= e^x\left(2x - x^2\right) + c$$

2. <u>Typ: „Faktor 1“</u>

$$\int \ln x dx$$
$$= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} dx$$
$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - x + c$$

3. Typ: „Phönix aus der Asche“

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{\sin 2x}_{v} dx$$
$$= -e^{-x} \sin 2x - \int -e^{-x} 2 \cos 2x dx$$
$$= -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx$$
$$= -e^{-x} \sin 2x + 2\left(-e^{-x} \cos 2x\right) - 2 \int -e^{-x} (-2) \sin 2x dx$$
$$= -e^{-x} \sin 2x + 2\left(-e^{-x} \cos 2x\right) - 4 \int e^{-x} \sin 2x dx$$
$$\Leftrightarrow 5 \int e^{-x} \sin 2x dx = -e^{-x} \sin 2x + 2\left(-e^{-x} \cos 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow \int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x + \frac{2}{5}\left(-e^{-x} \cos 2x\right) + c$$

Übungsaufgaben

Bestimme die folgenden Integrale:

a) $\int \ln x dx$

b) $\int x \ln(x-1) dx$

c) $\int x e^{2x} dx$

d) $\int x^2 \cos x dx$

e) $\int (\ln x)^2 dx$

f) $\int x^3 e^{-x} dx$

g) $\int x^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx$

Solutiones permutatae

$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$; $\quad x \ln x - x + c$; $\quad -2e^{-\frac{1}{2}x}\left(x^2 + 4x + 8\right) + c$; $\quad \frac{1}{2} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c$;

$\frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} x^2 + x + \ln(x-1)\right) + c$; $\quad x\left((\ln x - 1)^2 + 1\right) + c$; $\quad -e^{-x}\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) + c$