Fachhochschule Isny

Naturwissenschaftlich Technische Akademie NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH

Skriptum

zum Brückenkurs Mathematik

der Dozenten Dr.-Ing. DIETRICH KUHN und Dipl.-Ing. HARALD SORBER

für die Fachbereiche Chemie, Physik und Informatik

mit dem Thema

„Einige Grundbegriffe, Sachverhalte und Formeln“

Zusammengestellt von

STEPHAN BEISKEN und TIMO MEYER

WS 2005 / 2006

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Teil 2

Anhang

Teil 1

1. Mengen

Eine Menge ist eine wohlbestimmte Gesamtheit von Dingen oder Objekten, die Elemente der Menge genannt werden. (Georg Cantor 1895)

Man schreibt: $x \in A$, wenn x zu A gehört, andernfalls $x \notin A$
Bsp.: A = {1,2,3,4}

Zwei Mengen sind gleich A=B, wenn die Elemente von A mit den Elementen von B übereinstimmen.

Teilmenge, leere Menge

B heißt Teilmenge von A ($B \subseteq A$), wenn jedes Element von B auch Element von A ist (einschließlich des Falles von A = B).

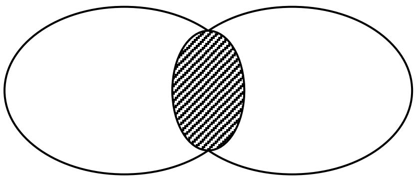
$B \subset A$ (echte Teilmenge)
$B \subseteq A$ (unechte Teilmenge)

Eine Menge die keine Elemente enthält ist die leere Menge. M = {} = ϕ
Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

Unter dem Durchschnitt $A \cap B$ (lies: A geschnitten mit B) versteht man die Menge aller Elemente x, die sowohl Element von A als auch von B sind.

Venn – oder Euler – Diagramm:



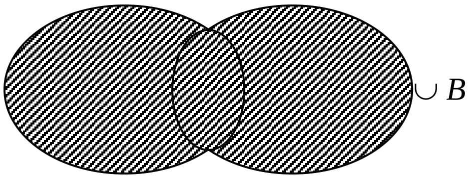
$A \cap B$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Der Durchschnitt zweier Mengen kann auch die leere Menge sein. A und B heißen dann elementfremd oder disjunkt.

Unter der Vereinigung ($A \cup B$) der Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente x, die entweder zu A oder zu B oder zu beiden gehört.

Venn – oder Euler – Diagramm:



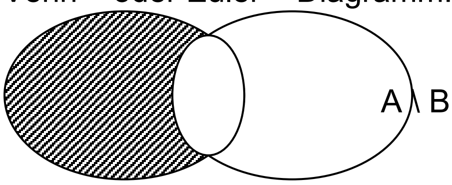
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Durchschnitt und Vereinigung lassen sich auch von unendlichen Mengen bilden.
|N = {1,2,3,…}

<u>Differenz von Mengen</u>

Unter der Differenz von Mengen A und B (A\B) (ließ: A ohne B) versteht man die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.
Bsp.: |R \ {0} Menge aller von 0 verschiedenen reellen Zahlen.

Venn – oder Euler – Diagramm:



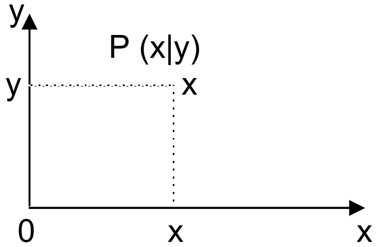
A \ B = $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

<u>Produktmengen</u> (kartesisches Produkt)

A und B seien Mengen. Elemente a und b aus A und B kann man zu <u>geordneten</u> <u>Paaren</u> zusammenfassen (a/b).
Die Menge aller solcher geordneten Paare wird mit A x B bezeichnet und heißt <u>Produktmenge</u> von A und B.

$A \times B = \{(a/b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Bsp.: |R x |R = |R² (Ebene mit allen Koordinatenpaaren)



2. Einige Formeln

Fakultät

n sei eine natürliche Zahl ($n \in |N$) und es sei $n \neq 0$. Dann ist n! (ließ: n Fakultät) definiert durch:

n! = 1 * 2 * 3 * … * (n-1) * n
0! = 1

Binomialkoeffizient

n sei eine natürliche Zahl (n = 0 zugelassen).
k sei eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq n$.
Dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (ließ: n über k) definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$$

Sonderfälle

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!*(n-0)!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!*0!} = 1$$

$$\binom{0}{0} = \frac{1}{1*1} = 1$$

Summenzeichen

Gegeben seien n Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.
Die Summe $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ wird abgekürzt dargestellt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

i heißt Summationsindex, 1 und n sind Summationsgrenzen.

Bsp.: (1) $\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{k=1}^{4} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

(2) $\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{j=2}^{5} x_{j-1} = \sum_{h=0}^{3} x_{h+1} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

(3) Der Summationsindex muss <u>nicht</u> als Index auftreten.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

$$\sum_{k=2}^{m} k * x_k = 2 * x_2 + 3 * x_3 + ... + m * x_m$$

Rechenregeln

(1) $\sum_{i=1}^{n} x = n * x$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$

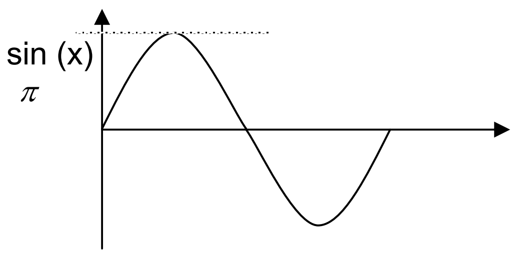
(3) $c * \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i * c$

3. Einige mathematische Symbole

Implikation ($\Rightarrow$)

Das Implikationszeichen (-operator) steht zwischen zwei Aussagen und bedeutet, dass die zweite Aussage aus der ersten aussage folgt, bzw. genauer: Wenn die erste Aussage wahr ist, dann ist auch die zweite Aussage wahr.

Bsp.: (1) $A \Rightarrow B$
(2) $0 < x < \pi \Rightarrow \sin(x) > 0$



Äquivalenz ($\Leftrightarrow$)

Zwei Aussagen A und B sind äquivalent, wenn zwischen beiden Aussagen die Implikation in beiden Richtungen gilt.
$A \Leftrightarrow B$

Bsp.: A: Z ist eine gerade Zahl
B: Z ist durch 2 teilbar
$A \Leftrightarrow B$

4. Absoluter Betrag

Definition:

$$| a |= \{^{a \text{ für } a \geq 0}_{-a \text{ für } a < 0}$$

Demzufolge gilt auch:

$$| a |=^{+}_{-} \sqrt{a^2}$$

Geometrisch ist unter | a – b | die vorzeichenlose Differenz zwischen a und b zu verstehen; also der Abstand zwischen a und b!
Dabei ist | b – a | = | a – b | wegen der Beziehung b – a = - (a – b).

5. Allgemeines über Funktionen

(1) Eine Funktion f (einer Variablen) ist dadurch gegeben, dass jeder reellen Zahl x aus einer nichtleeren Teilemenge D(f) $\in$ |R, der Definitionsmenge von f eindeutig eine reelle Zahl f(x), dem Funktionswert von f an der Stelle x, zugeordnet wird.

Man schreibt auch:
$f : x \rightarrow f(x), x \in D(f)$

(2) Darstellung von Funktionen durch:
- Funktionsgleichung
- Wertetabelle
- Graphen

(3) In naturwissenschaftlichen Anwendungen der Mathematik heißt eine Funktion nicht immer f, die unabhängige Variable nicht immer x.

5.1 Polynomfunktionen (ganzrationale Funktion)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a_0, a_1 ,a_2, …, a_n sind reelle Zahlen
Ist $a_n \neq 0$, dann ist die Funktion vom Grad n.

Spezielle Formen:
- konstante Funktion f(x) = a (Polynom vom Grad 0)
- lineare Funktion: f(x) = a_1x + a_0 (Polynom vom Grad 1)
- …

5.2 Rationale Funktionen (gebrochen rationale Funktionen)

Ein Quotient aus den Polynomfunktionen f und g heißt rationale Funktion.

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Die rationale Funktion ist überall dort definiert, wo $g(x) \neq 0$ ist.

Bsp.: (1) $q(x) = \frac{1}{x}$ ist dort definiert, wo $x \neq 0$

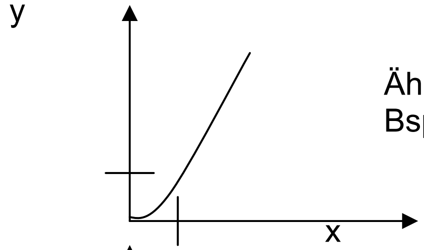
(2) $q(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ist für alle x definiert

5.3 Potenzfunktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = ax^r$ heißt Potenzfunktion, wobei der Exponent r eine beliebige reelle Zahl sein kann. Der Faktor a bewirkt Stauchung oder Streckung des Graphen in y-Richtung. Bei negativem a noch verbunden mit einer Spiegelung an der x-Achse.

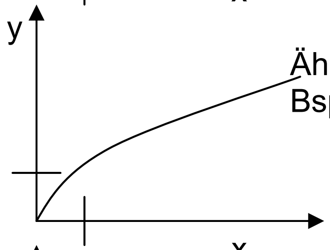
Graphen lassen sich in Abhängigkeit von r klassifizieren:

(1) r > 1



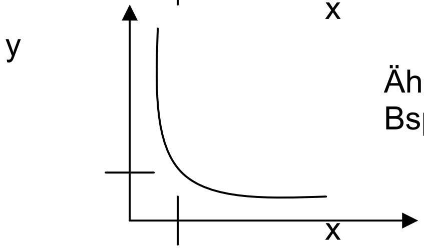
Ähnlich Parabel
Bsp.: r = 2

(2) 0 < r < 1



Ähnlich Wurzelfunktion
Bsp.: r = 1/2

(3) r < 0



Ähnlich Hyperbel
Bsp.: v = -1

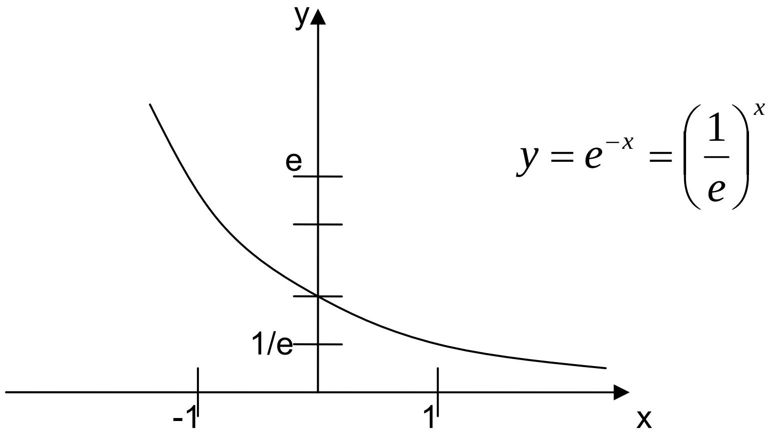
5.4 Exponentialfunktionen

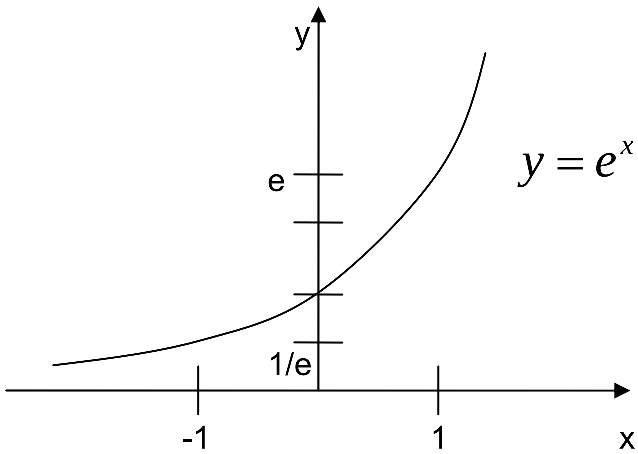
Eine Funktion $f(x) = a^x$ für $a > 0 \wedge a \neq 1$ heißt Exponentialfunktion.

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

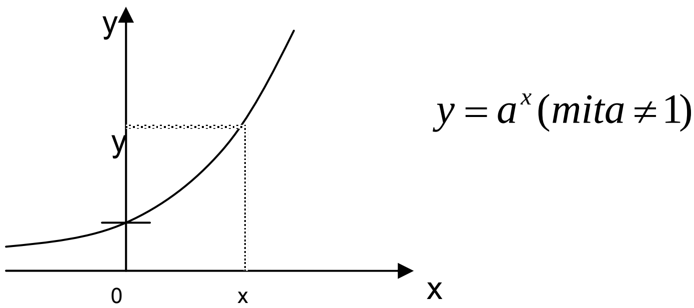
1. f(0) = 1
2. f(1) = a
3. f(x) > 0 für alle x $\in$ |R
4. Geltende Potenzregeln:
   a. $a^x * a^y = a^{x+y}$
   b. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
   c. $(a^x)^y = a^{x*y}$ für alle x und y
   d. $(a*b)^x = a^x * b^x$ (a, b > 0)

Graphen der Exponentialfunktion für $a = \frac{1}{e}$ und a = e:





5.5 <u>Logarithmen</u>



Die Funktion zeigt, dass zu jeder positiven Zahl y > 0 genau ein x existiert mit $y = a^x$.
Die Gleichung kann nach x aufgelöst werden. Die daraus gewonnene Zahl x heißt <u>Logarithmus von y zur Basis a</u>.

$$x = \log_a y$$

Durch die Zuordnung y → $\log_a$ y erhält man die <u>Logarithmusfunktion zur Basis a</u>.

Ihre Definitionsmenge besteht aus allen y > 0 (da $a^x > 0$ für alle x, lässt sich der Logarithmus für Zahlen ≤ 0 nicht definieren.

Also ist: $\boxed{x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x}$

Ersetz man in der Formel $y = a^x$ die Zahl x durch log $_a$ y, so erhält man:

$$\boxed{y = a^{\log_a y} \quad \text{für alle } y > 0}$$

Entsprechend kann man in x = log $_a$ y für y die Größe a^x einsetzen und findet:

$$\boxed{x = \log_a a^x \quad \text{für alle } x}$$

Formeln sind nützlich zum „Logarithmen zu beseitigen" oder „Exponenten herunterzuholen.

Eigenschaften des Logarithmus:

1. log $_a$ 1 = 0, denn $a^0 = 1$
2. log $_a$ a = 1, denn $a^a = a$
3. log $_a$ x ist nur für x > o definiert
4. <u>Rechenregeln</u> für Logarithmen:
   a. $\log_a(r * s) = \log_a r + \log_a s$
   b. $\log\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$ } für alle r,s > 0
   c. $\log_a(r^s) = s * \log_a r$ für alle r > 0 und alle s $\in$ |R

<u>natürliche Logartihmen</u>

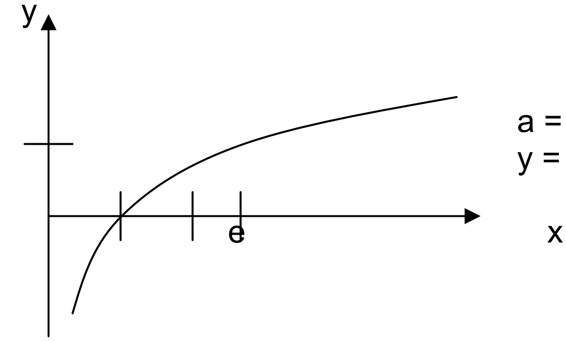
Die Logarithmusfunktion zur Basis e (Eulersche Zahl) heißt <u>natürliche Logarithmusfunktion</u>.
Man schreibt: ln x (logaritmus naturalis) oder log $_e$ x
Mit Hilfe der natürlichen Logarithmen kann man folgende Beziehungen formulieren: $\boxed{a^x = e^{x * \ln a}}$ denn $e^{\ln a} = a$ und $e^{\ln a * x} = (e^{\ln a})^x$

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, x > 0}$$

Man wendet ln auf die Beziehung $x = a^{\log a^x}$ an und findet

$$\ln x = \ln(a^{\log a^x}) = \log_a x * \ln a$$

Graph des natürlichen Logarithmus:



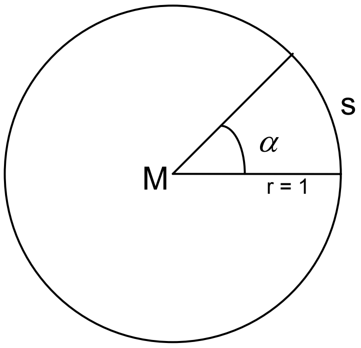
$a = e > 1$
$y = \log_e x = \ln x$

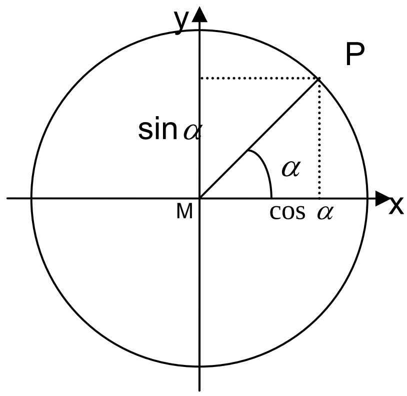
5.6 Trigonometrische Funktionen

Winkel im Bogenmaß (engl. radion)

Der Kreisumfang entspricht im Bogenmaß 2π, der Winkel von $90° \equiv \frac{\pi}{2}$.
Allgemeine Berechnungsformel vom Gradmaß ins Bogenmaß:

Betrachtung am Einheitskreis:





Ausgangspunkt: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{s}{U}$, daraus folgt:

$$\boxed{s_{Bogenmaß} = a_{Gradmaß} * \frac{\pi}{180}}$$

Wichtige Beziehungen

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigonometrischer Phytagoras
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$ Punktsymmetrie
3. $\cos(-x) = \cos(x)$ Achsensymmetrie für alle x
4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ Phasenverschiebung
5. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

5.7 Ungleichungen

Ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit reellen Zahlen sind Ungleichungen.
Bekannte Beziehungen: $a < b, a \leq b, a > b, a \geq b$

Das Rechnen mit Ungleichungen basiert auf 3 Grundregeln:

1. Aus a < b folgt a + c < b + c für jedes c $\in$ |R
2. Aus a < b folgt a * c < b * c für jede positive reelle Zahl (c > 0)
3. Aus a < b folgt a * c > b * c für jede negative reelle Zahl (c < 0)

Bsp.: Aus 3 < a darf nicht gefolgert werden, dass 3 * x < a * x ist, sondern

vorsichtige Fehlerunterscheidung:

- für x > 0 ist 3 * x < a * x
- für x < 0 ist 3 * a > a * x
- für x = 0 ist 3 * x = a * x = 0

Teil 2

1. Reihen, Folgen, Differential, Ableitungsregeln, Newtonverfahren

Reihe

Eine Reihe wird durch mehrere Koeffizienten gebildet, die durch ein Operationszeichen verbunden werden. Unendlich ist sie dann, wenn unendlich viele Koeffizienten vorhanden sind.

Folge

Eine Folge ist eine Formel in die man (unendlich) verschiedene Werte einsetzen kann, so dass ein konkretes Ergebnis vorliegt
Besitzt eine Folge einen Grenzwert, sagen wir sie konvergiert gegen diesen Grenzwert. Die Folge ist konvergent.
Eine Reihe heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert. In diesem Fall strebt die Folge der Teilsummen nach plus oder minus Unendlich oder aber sie divergiert unbestimmt.

1. Funktionen mit einem diskreten Definitionsbereich N heißen Folgen.
2. Enthält jede Umgebung des Zahlenpunktes a fast alle Folgeglieder (d.h. alle mit Ausnahme endlich vieler), dann konvergiert die Folge gegen n.

Differentialrechnung

→ Differenzquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Anstieg an einer Sekante

→ Differentialquotient: $\frac{dy}{dx}$ mit $\Delta x \to 0$
Anstieg einer Tangente an einem Kurvenpunkt

Ableitungsregeln

Potenzregel:
$f(x) = x^n \;,\; n \in |\mathrm{N}$
$f'(x) = n * x^{n-1}$

Faktorregel:
Ein konstanter Faktor vor der Funktion bleibt bei der Ableitung erhalten.

Produktregel:
$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)$

Quotientenregel:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kettenregel:
$f'(x) = v'(u(x)) * u'(x)$

Newtonverfahren

Verfahren nach Newton → Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ x_1: x-Wert des Startpunktes

$f'(x) = 0$ muss bei Wahl des Startpunktes vermieden werden: waagerechte Tangente!

2. Kurvendiskussion, Integration, Rechenregeln, Exponentialfunktion, natürliche Logarithmen

Kurvendiskussion / Differentation

1. Symmetrie
2. Achsenschnittpunkte
3. Extremwerte
4. Wendepunkte
5. Schaubild in einem geeigneten Intervall

1. Symmetrie

   Symmetrie zur Ordinate $f(x) = -f(x)$, bei Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$.
   ↓
   y – Achse → abhängig Veränderliche
   Abszisse → x – Achse → unabhängig Veränderliche

2. Achsenschnittpunkte

   Ordinatenschnittpunkt: $f(0) = y$
   Abszissenschnittpunkt: $f(x) = 0$

3. Extremwerte: relative Maxima, bzw. Minima

   HP TP
   WP

   I. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ = Parallele zur x-Achse
   II. hinreichende Bedingung: $f''(x) > 0 \Rightarrow TP$
   $f''(x) < 0 \Rightarrow HP$

4. Wendepunkte

   bei WP $\Rightarrow$ Krümmung = 0 = $f''(x) = 0$

I. notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
II. hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

5. Graphische Darstellung

→ immer nur auf einem Intervall
→ Wertetabelle

Integration („Umkehr der Differentation") $\Rightarrow$ Aufleitung

Stammfunktion: $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$, C = Integrationskonstante

$\int f(x) \Rightarrow$ unbestimmtes Integral $\Rightarrow$ Funktion

$\int_a^b f(x) \Rightarrow$ bestimmtes Integral $\Rightarrow F(b) - F(a) = A \Rightarrow$ reelle Zahl $\equiv$ Fläche

$$A = F(b) - F(a) = [F(c)]_a^b$$

Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} * x^{n+1}$

Faktorregel: $\int a * f(x)dx = a * \int f(x)dx$

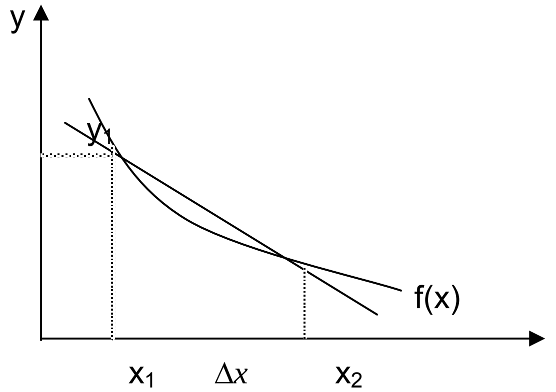
Summenregel: $\int (f + g)dx = \int fdx + \int gdx$

$$\int f(x) * \underline{dx} = Fläche[a,b]$$

Summe $\Delta x \to 0$

„Trapezverfahren"

Gesucht: bestimmtes Integral in gewählten Grenzen → Fläche



A = Trapez

$A = y_1 * \Delta x \to$ für $\Delta x \to 0 \to dx$

$\Rightarrow$ Fläche unter dem Punkt ($x_1|y_1$)

$$A = \int_{x_1}^{x_2} * f(x) * dx$$

Logarithmus naturalis

Die bestimmte Integralfunktion der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ mit der unteren Grenze a = 1 wird als „natürlicher Logarithmus“ bezeichnet. Man schreibt hierfür

$$\ln(x_0) = \int_1^{x_0} \frac{1}{x} dx .$$

Es gelten nachstehende Eigenschaften:

a) $\ln'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$

b) $\ln(1) = 0$

c) $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$

d) $\ln(a^k) = k * \ln(a), k \in$ |R

e) ln ist mit dem Definitionsbereich $|R^+$ und dem Wertevorrat |R umkehrbar.

→ Definition der Umkehrfunktion:

Vertauschen von Definitionsbereich (alle x) mit Wertevorrat (alle y)

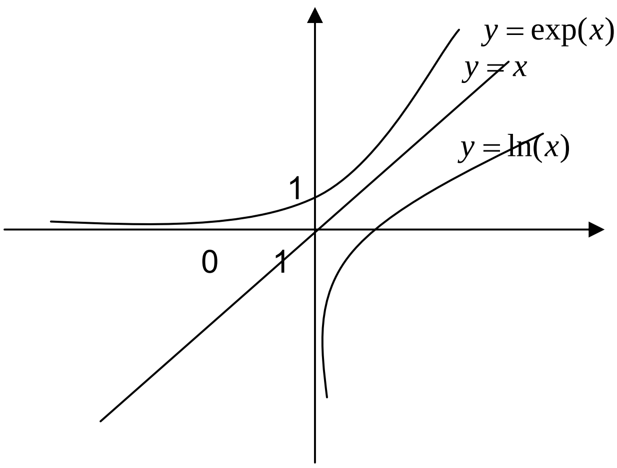
Weitere Logarithmen:

lg → dekadischer Logarithmus
ld → dualer Logarithmus
ln → natürlicher Logarithmus
$\log_2$ → Logarithmus zur Basis 2

Exponentialfunktion

Definition: Die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus heißt Exponentialfunktion. Gesetzt wird dafür exp = $\ln^{-1}$.

Insbesondere wird für den Funktionswert an der Stelle x = 1 der Wert e, also exp (1) = e geschrieben.
e heißt „Euler´sche Zahl“ (irrationale Zahl; Bsp.: e, π (keine Periodizität)).



exp ist die Spiegelung von ln an der 1. Winkelhalbierenden y = x

→ exp´ = exp $\Rightarrow$ ermöglicht das Lösen von Differentialgleichungen Ableiten beliebiger Exponentialfunktionen

Grundrechenformeln

$a^b = c \rightarrow$ Potenzieren; a = Basis, b = Exponent; wenn a = e → Exponentialfkt.
$\log_a c = b \rightarrow$ Logarithmieren
$\sqrt[b]{c} = a \rightarrow$ Radizieren

3. Vektorielle Geometrie mit Addition/Subtraktion, S-Multiplikation, Skalares Produkt,

Vektorielle Geometrie

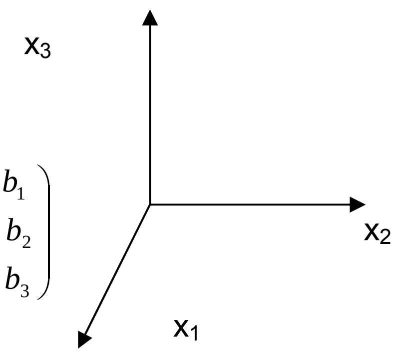
Kraft → Vektor = Betrag u. Richtung

Ortsvektor = Vektor mit Fußpunkt (0|0)
und Spitze (a_1|a_2|a_3)

zeigt mit der Spitze auf den Punkt A

Einheitsvektor mit dem Betrag 1 und der jeweiligen Achsenrichtung:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Addition von Vektoren $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

(graphisch durch ein Kräfteparallelogramm)

Subtraktion von Vektoren

Definition: Gegeben seien die Punkte A (a_1|a_2|a_3) und B (b_1|b_2|b_3),
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die dazugehörigen Ortsvektoren, dann gilt

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \vec{OC}$$ (AB: Richtungsvektor; OC: Ortsvektor C)

S-Multiplikation (Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (Skalar))

Ein Vektor $\vec{a}$ wird mit einer reellen Zahl r multipliziert, indem man jedes Element von $\vec{a}$ mit der reellen Zahl r multipliziert.

$$r * \vec{a} = r * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$

Achtung: Skalarprodukt $\neq$ S-Multiplikation (Verlängerung o. Verkürzung)
Skalarprodukt (Multiplikation von 2 Vektoren)

Ist α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so bezeichnet man das Produkt $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos\alpha$ als Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Merke:

„Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften..."

– Carl Friedrich Gauß –

Aber: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik."

– Euklid –

Anhang

A Literaturempfehlung

GOTTWALD, S. (Hrsg.), *Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik*, Mannheim: Meyers Lexikonverlag [14]1995. [ISBN 3-411-07771-9]

B Stichwortverzeichnis