1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der jeweils geeigneten Regeln (1. Ableitung bilden)[1]

a) $x = t^3 * 3^t$

Produktregel	$y = u(x) * v(x)$	$y' = u'*v + v'*u$

Formel	$y = a^x$	$y' = (\ln a) * a^x$

$u = t^3 \qquad u' = 3t^2$
$v = 3^t \qquad v' = (\ln 3) * 3^t$

$$x' = 3t^2 * 3^t + 3^t * (\ln 3) * t^3 = \underline{\underline{3t^2 * 3^t + t^3 * 3^t * \ln 3}}$$

---

b) $y = \dfrac{5x^4 - x^3}{3x^3 + x^2}$

Quotientenregel	$y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \dfrac{u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)}{[v(x)]^2}$

$u = 5x^4 - x^3 \qquad u' = 20x^3 - 3x^2$
$v = 3x^3 + x^2 \qquad v' = 9x^2 + 2x$

$$y' = \frac{(20x^3 - 3x^2)(3x^3 + x^2) - (9x^2 + 2x)(5x^4 - x^3)}{(3x^3 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(60x^6 - 9x^5 + 20x^5 - 3x^4) - (45x^6 + 10x^5 - 9x^5 - 2x^4)}{9x^6 + 6x^5 + x^4}$$

$$= \frac{60x^6 - 9x^5 + 20x^5 - 3x^4 - 45x^6 - 10x^5 + 9x^5 + 2x^4}{9x^6 + 6x^5 + x^4}$$

$$= \frac{15x^6 + 10x^5 - x^4}{9x^6 + 6x^5 + x^4}$$

$$= \frac{x^4 * (15x^2 + 10x - 1)}{x^4 * (9x^2 + 6x + 1)} = \underline{\underline{\frac{15x^2 + 10x - 1}{9x^2 + 6x + 1}}}$$

[1] Siehe die Ableitungsformeln im „Papula“, Bd. 1, S. 313-314.

c) $z = \frac{x^3}{\cos x}$

Quotientenregel	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)*v(x)-v'(x)*u(x)}{[v(x)]^2}$

$u = x^3$ $u' = 3x^2$
$v = \cos(x)$ $v' = -\sin(x)$

$$z' = \frac{[3x^2 * \cos(x)] - [-\sin(x) * x^3]}{[\cos(x)] * [\cos(x)]} = \underline{\underline{\frac{3x^2 * \cos(x) - x^3 * [-\sin(x)]}{\cos^2(x)}}}$$

---

d) $y = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$

Kettenregel	$y = F\{u(x)\} = f(u)$	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$
Quotientenregel	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)*v(x)-v'(x)*u(x)}{[v(x)]^2}$

<u>1) Innere Ableitung nach Quotientenregel</u>

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Formel	$y = \sqrt{x}$	$v' = \frac{1}{2*\sqrt{x}}$

$u = 1$ $u' = 0$
$v = \sqrt{x}$ $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{0*\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\underbrace{(\sqrt{x})^2}_{x}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{1}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} * \frac{1}{x} = \frac{-1}{2\sqrt{x}*x}$$

<u>2) Äußere Ableitung</u>

$g = \sin(x)$ $g' = \underline{\underline{\cos(x)}}$

3) Ableitung nach Kettenregel

$$y' = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}*x}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2\sqrt{x}*x} * \cos\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

alternativ

$$y = \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

- innere Ableitung

Formel	$x^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2} * x^{\frac{-3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

- äußere Ableitung

$g = \sin(x)$ $\quad g' = \underline{\underline{\cos(x)}}$

- Ableitung nach Kettenregel

$$y' = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} * \cos\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

---

e) $y = (7x^3 + 4x^2 - 3x + 5)^2$

Kettenregel	$y = F\{u(x)\} = f(u) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

$$u^2 = (7x^3 + 4x^2 - 3x + 5)^2$$
$$u = 7x^3 + 4x^2 - 3x + 5 \quad = \quad u' = 21x^2 + 8x - 3$$

$$y' = 2 * [\ (7x^3 + 4x^2 - 3x + 5)\ ] * (21x^2 + 8x - 3)$$

$$= 2 * [\ 147x^5 + 84x^4 - 63x^3 + 105x^2 + 56x^4 + 32x^3 - 24x^2 + 40x - 21x^3 - 12x^2 + 9x - 15\ ]$$

$= \quad 2*[147x^5 + 140x^4 - 52x^3 + 69x^2 + 49x - 15]$

$= \quad \underline{\underline{294x^5 + 280x^4 - 104x^3 + 138x^2 + 98x - 30}}$

---

f) $y = \ln[\, x * \cos(x)\,]$

Formeln:	$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = \cos(X)$	$y' = -\sin(x)$
	$y = \ln(u*v)$	$y' = \ln(u) + \ln(v)$

$y = \ln[\, x\,] + \ln[\, \cos(x)\,]$

$y_1 = \ln(x)$ $\quad y_1' = \frac{1}{x}$

$y_2 = \ln\cos[\,(x)\,]$ $\quad y_2'$ = nach Kettenregel

y_2' = äußere Ableitung * innere Ableitung = $\frac{1}{\cos(x)} * [-\sin(x)]$

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos(x)} * [-\sin(x)] = \frac{1}{x} + \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{x} - \tan(x)}}$$

---

2. Bilden Sie die zweite Ableitung von

a) $y = 6x^4 + 2x^2 - 15x + \frac{1}{x} + \ln x$

<u>Teil 1: Vorbereitung</u>

Formel:	$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Ableitung der Funktion $y = \frac{1}{x}$ nach Quotientenregel

Quotientenregel	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)}{[v(x)]^2}$

$u = 1 \qquad u' = 0$
$v = 1x \qquad v' = 1$

$$y_1' = \frac{0 * x - 1*1}{x^2} = \underline{\frac{-1}{x^2}}$$

$$y_1' = \frac{-1}{x^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$u = -1 \qquad u' = 0$
$v = x^2 \qquad v' = 2x$

$$y_1'' = \frac{0 * x^2 - 2x * (-1)}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \underline{\frac{2}{x^3}}$$

<u>Teil 2: Ableitung der Aufgabe</u>

1. Ableitung $\qquad y' = 24x^3 + 4x - 15 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

2. Ableitung $\qquad y'' = \underline{\underline{72x^2 + 4 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}}}$

---

b) $\qquad y = \sin(x^2)$

1. Abl.	Kettenregel	$y = F\{u(x)\} = f(u)$	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$
2. Abl.	Produktregel	$y = u(x) * v(x)$	$y' = u'*v + v'*u$

$$y' = \underbrace{2x}_{u} * \underbrace{\cos(x^2)}_{v}$$

$u = 2x \qquad u' = 2$
$v = \cos(x^2) \qquad v' = -\sin(x^2) * 2x$

$y'' = 2 * \cos(x^2) + [-\sin(x^2) * 2x] * 2x$

$y'' = \underline{\underline{2 * \cos(x^2) - 4x^2 * \sin(x^2)}}$

c) $y = e^{\sin(x)}$

Ableitung nach Kettenregel, weil die e-Funktion zuerst vom Sinus abhängt und dann erst der Sinus vom x abhängt!

$$y' = \underbrace{e^{\sin(x)}}_{\text{äußere Ableitung}} * \underbrace{\cos(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

y'' nach Produktregel $y'' = u' * v + v' * u$

$u' = e^{\sin(x)}$ $u' = e^{\sin(x)} * \cos(x)$
$v' = \cos(x)$ $v' = -\sin(x)$

$$y'' = e^{\sin(x)} * \cos(x) * \cos(x) + [-\sin(x)] * e^{\sin(x)}$$

$$y'' = [\, e^{\sin(x)} * \cos(x) \,] * \cos(x) - e^{\sin(x)} * \sin(x)$$

---

3. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ der durch die Bestimmungsgleichung $xy^3 + y^2 - 3xy + x^2 = 0$ *implizit* gegebenen Funktion

$$xy^3 + y^2 - 3xy + x^2 = 0$$

Ableitung nach Produktregel $y' = u' * v + v' * u$

$u_1 = 1x$ $u_1' = 1$
$v_1 = 1y^3$ $v_1' = 3y^2 * y'$

$u_2 = 3x$ $u_2' = 3$
$v_2 = 1y$ $v_2' = 1 * y'$

$$(1 * y^3 + 3y^2 * y' * x) + 2y * y' - (3 * y + y' * 3x) + 2x = 0$$

$$y^3 + x * 3y^2 * y' + 2y * y' - 3y - 3x * y' + 2x = 0$$

$$y'(3xy^2 + 2y - 3x) = -y^3 + 3y - 2x$$

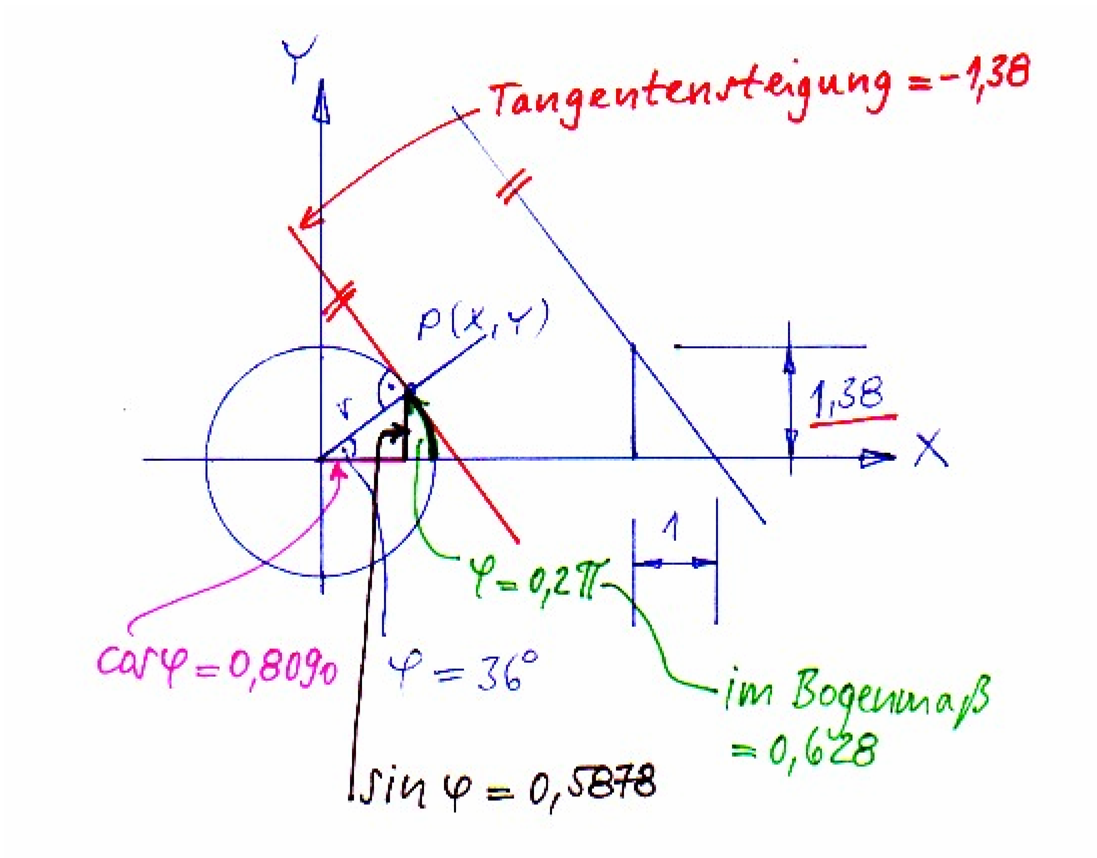
$$y' = \frac{-y^3 + 3y - 2x}{3xy^2 + 2y - 3x}$$

Nun können wir das Ergebnis mit – 1 im Zähler und Nenner erweitern. Das Vorzeichen von y' ändert sich dadurch nicht.

$$y' = \frac{y^3 - 3y + 2x}{-3xy^2 - 2y + 3x}$$

4. Bestimmen Sie die jeweils in der angegebenen Form (d.h. ohne die Gleichungen ineinander umzuformen) die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ der Kreisfunktion (r sei eine beliebig gewählte Zahl):

a) **explizit**: $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$



r = 5 P(x|y) = P (0,8090|0,5878) * r = P (4,045|2,939)

Kreisgleichung : $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}}$

<u>Wir verwenden die Kettenregel</u>

F[u(x)] ; F ist von u abhängig und u ist von x abhängig

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

- Substitution : $u(x) = r^2 - x^2$ $u' = -2x$

Formel:	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = \pm \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}}_{\text{äußere Ableitung}} * \underbrace{-2x}_{\text{innere Ableitung}} = \underline{\underline{-\frac{x}{y}}}$$

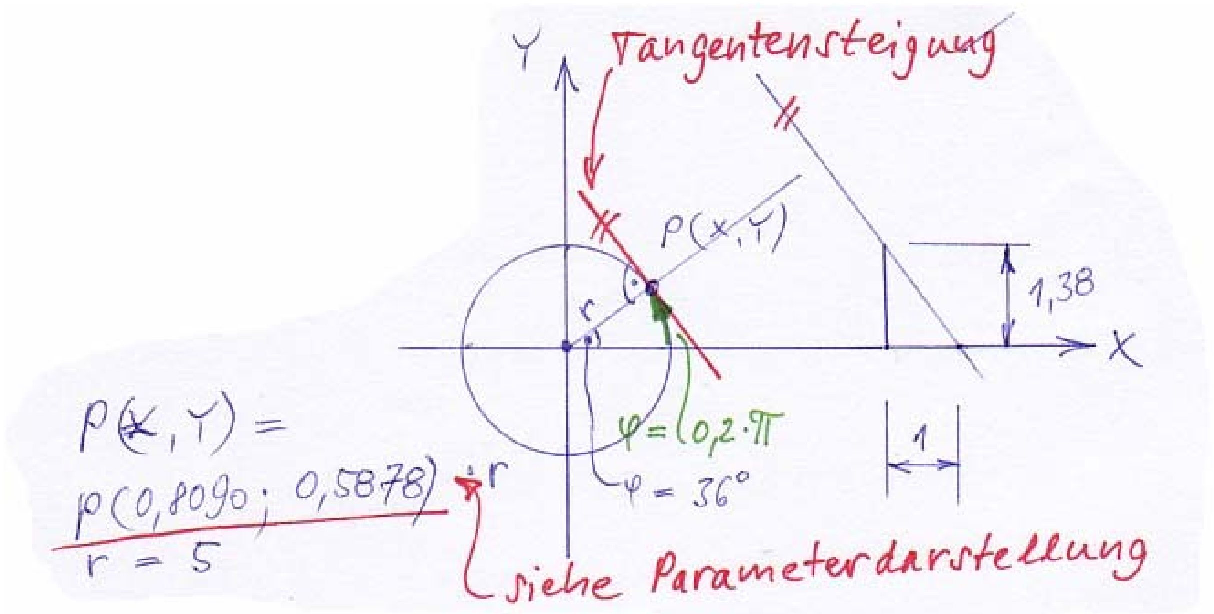
- Zahlenwerte einsetzen
- Steigung ist das Verhältnis $\frac{Höhe}{Grundlinie}$

$x_0 = 4{,}045$

$$y' = \pm \frac{1}{2\sqrt{r^2 - 4{,}045^2}} * (-2 * 4{,}045) = \mp \frac{2 * 4{,}045}{2 * 2{,}939} = \underline{\underline{-\frac{1{,}376}{1{,}0}}}$$

---

b) **implizit**: $x^2 + y^2 = r^2$ $F(x|y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$



<u>Lösungsweg</u>

a) Gliedweise Differentation der Funktionsgleichung F(x|y) = 0 nach *x*, wobei die Variable *y* als eine Funktion von *x* anzusehen ist. Jeder Term in der Funktionsgleichung, der die abhängige Variable *y* enthält, ist daher unter Verwendung der Kettenregel zu differenzieren.

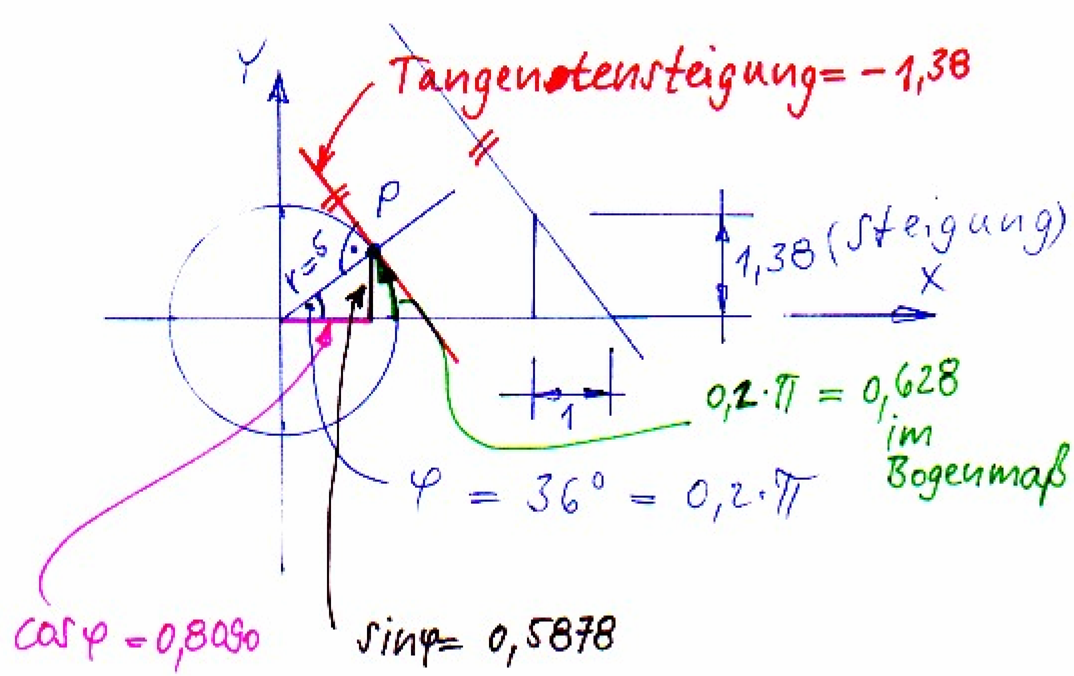
b) Auflösung der Funktionsgleichung nach $y' = \frac{dx}{dy}$ führt zur gesuchten Ableitung (Anstieg der Kurventangente).

$$\frac{dx}{dy}[F(x|y)] = \frac{dx}{dy}(x^2 + y^2 - r^2) = 2x + 2y * y' = 0$$

- Tangentensteigung: $y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{0{,}8090}{0{,}5878} = \underline{\underline{-1{,}376}}$

---

c) Parameterform: x = r * cos φ | y = r * sin φ ($\varphi \in [0,2\pi[$)



$\varphi = 0{,}2\pi = 36°$ $\qquad r = 5 \qquad \varphi = Winkelparameter$

$x = r * \cos\ \varphi \qquad y = r * \sin\ \varphi$

- Tangentensteigung $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5 * \cos\ \varphi}{5 * (-\sin\ \varphi)} = \frac{5 * 0{,}8090}{-5 * 0{,}5878} = -\frac{4{,}045}{2{,}939} = \underline{\underline{-\frac{1{,}376}{1{,}0}}}$

5. Bei welchem x-Wert sind die Tangenten an den Kurven
f(x) = $2x^3 + 9x^2 + 24x + 7$ und **g(x) $15x^2 + 72x - 42$** parallel zueinander?

Durch Gleichsetzen der 1. Ableitung (Tangentensteigung) der beiden Funktionen und auflösen der Gleichung nach x erhalten wir die Stellen an denen die Tangenten parallel zueinander sind.

f'(x) = $6x^2 + 18x + 24$ g'(x) = $30x + 72$

$6x^2 + 18x + 24 = 30x + 72$
$6x^2 - 12x - 48 = 0$

$$x^2 \underbrace{-2}_{p}x \underbrace{-8}_{q} = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad = x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)} = 1 \pm \sqrt{9}$$

$x_1 = 1 + 3 = \underline{\underline{+4}} \quad \wedge \quad x_2 = 1 - 3 = \underline{\underline{-2}}$

---

6. Bestimmen Sie alle relativen Extremwerte (Maxima und Minima) der Kurve $\mathbf{y = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 7}$. Woran können Sie erkennen, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt ?

Die relativen Extremwerte erhalten wir durch:

1) Bildung der 1. Ableitung
2) Nullsetzen der 1. Ableitung
3) Auflösen der Gleichung nach x

Ein relativer Extremwert liegt vor, wenn:

$y'(x_0) = 0$
$y''(x_0) \neq 0$

a) Ein relatives <u>Maximum</u> an der Stelle x_0 liegt vor, wenn

$y'(x_0) = 0$ und $y''(x_0) < 0$ | $y'(x_0) = 0$ und VZW von y' von + nach –

b) Ein relatives <u>Minimum</u> an der Stelle x_0 liegt vor, wenn

$y'(x_0) = 0$ und $y''(x_0) > 0$ | $y'(x_0) = 0$ und VZW von y' von – nach +

c) Ein <u>Wendepunk</u>t an der Stelle x_0 liegt vor, wenn

$y''(x_0) = 0$ und $y'''(x_0) \neq 0$ | $y''(x_0) = 0$ und VZW von y''

Bilden der Ableitungen

$y \quad = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 7$
$y' \quad = 12x^3 + 24x^2 + 12x$
$y'' \quad = 36x^2 + 48x + 12$
$y''' \quad = 72x +48$

Nullsetzen der ersten Ableitung

$y' \quad = 12x^3 + 24x^2 + 12x = 0 \qquad | / 12$

$x_1 = 0 \wedge x_{2/3} = x^2 + 2x +1 = 0$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-1)} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \pm 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -1}} \qquad \underline{\underline{x_3 = -1}}$$

Es existiert eine einfache Nullstelle bei x = 0 und eine doppelte Nullstellen bei x= – 1.

Extremwerte Suchen

$y \quad = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 7$
$y_{(0)} \quad = 3*0^4 + 8*0^3 + 6*0^2 – 7 = –7$
$y_{(-1)} \quad = 3*–1^4 + 8*–1^3 + 6*–1^2 – 7 = –6$

Es existiert <u>kein</u> Maximum, sondern Sattelpunkt beim Punkt (–1, –6)
Es existiert ein relatives Minimum (Tiefpunkt) beim Punkt (0, –7).

Wendepunkte

$$y'' = \underbrace{36x^2}_{a} + \underbrace{48x}_{b} + \underbrace{12}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4*36*12}}{2*36} =$$
$$\frac{-48 \pm \sqrt{2304 - 1728}}{72} = \frac{-48 \pm \sqrt{576}}{72} = \frac{-48 \pm 24}{72}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \wedge x_2 = -1$$

$$y = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 7$$

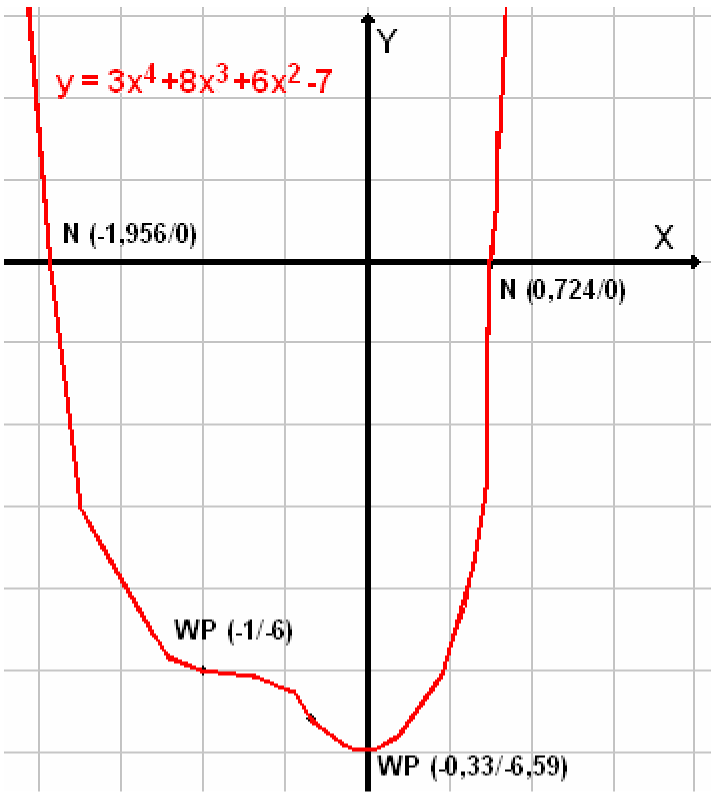
$$y_{(-1/3)} = 3*(-\frac{1}{3})^4 + 8*(-\frac{1}{3})^3 + 6*(-\frac{1}{3})^2 - 7 = \frac{3}{81} - \frac{24}{81} + \frac{54}{81} - \frac{567}{81} = \underline{\underline{-\frac{534}{81}}} \approx -6{,}59$$

$$y_{(-1)} = 3*-1^4 + 8*-1^3 + 6*-1^2 - 7 = \underline{\underline{-6}}$$

- Das Maximum ist kein Maximum, da hier ein Wendepunkt mit links-rechts-Krümmung vorliegt. Es handelt sich deshalb um einen Sattelpunkt mit den Koordinaten SP(–1, –6).

- An der Stelle WP $(-\frac{1}{3}, -\frac{534}{81})$ existiert ein zweiter Wendepunkt mit Krümmungsverhalten rechts-links.

<u>Skizze</u>



Fragen beleben das Geschäft

Zu Aufgabe 1a

Frage: Was ist das Besondere an dieser Aufgabe?

Antwort: Die Variable t nach der wir ableiten kommt als Potenz und im Exponenten vor daher Formel mit Logorithmus verwenden

$$y = a^x \qquad y' = (\ln a) * a^x$$

Zu Aufgabe 1b

Frage: Welche Ableitungsregel?

Antwort: Quotientenregel

Zu Aufgabe 1c.

Frage: **y = cos x** Wie lautet die Ableitung?

Antwort: **y' = –sin x**

Zu Aufgabe 1d

Frage: Wie muss abgeleitet werden?

Antwort: Mit der Kettenregel, die Wurzel am einfachsten mit der Potenzregel …

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}} \qquad y' = -\frac{1}{2} \; * \; x^{\frac{-3}{2}}$$

Zu Aufgabe3 - implizit gegebene Funktion

Frage: Wie muss abgeleitet werden?

Antwort: Es muss nach x und y differenziert werden.

Frage: Nach welcher Regel muss ein Term $\mathbf{xy^3}$ abgebildet werden?

Antwort: **N**ach der Produktregel da es ein Produkt von x und y ist und jeder Term in der Funktionsgleichung, der die abhängige Variable y enthält, ist daher unter Verwendung der Kettenregel zu differenzieren.

Zu Aufgabe 4

Frage: Wie sieht die Kreisgleichung aus und was können wir damit berechnen?

Antwort: $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ (nach Pythagoras)
Wir können damit jeden Punkt auf dem Kreis berechnen.

Frage: Was erreichen wir mit der Ableitung der Kreisgleichung?

Antwort: Die Tangentensteigung an jedem Kreispunkt.