Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^4$ an einer beliebigen Stelle x_0 ohne Verwendung irgendwelcher Vorkenntnisse oder Ableitungsformeln direkt aus dem Differenzenquotienten. Können Sie aus dieser Rechnung auf eine allgemeine Ableitungsformel für x^n schließen?

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(x+\Delta X) - f(x)}{\Delta X} = \frac{(x+\Delta X)^4 - x_0^4}{\Delta X}$$

- um $(x + \Delta X)^4$ auszurechnen verwenden wir den Binomischen Lehrsatz

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1*} b^1 + \dots + b^n$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n!-k!)}}$$

- in Gleichung einsetzen

$$\frac{f(x+\Delta X) - x^4}{\Delta X} = \frac{x^4 + \binom{4}{1} * x^3 * \Delta x + \binom{4}{2} * x^2 * \Delta x^2 + \dots + \Delta x^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \frac{4 * x^3 * \Delta x + 6 * x^2 * \Delta x^2 + 4x * \Delta x^3 + \Delta x^4}{\Delta x} = 4x^3 + 6x^2 * \Delta x^2 + \dots$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (4x^3 + 6x^2 * \Delta x^2 + \dots) = \underline{4x^3}$$

Wenn $\Delta x \to 0$ verschwinden alle Δx-Terme. Wenn wir nun statt x^4 allgemein mit x^n rechnen, dann erhalten wir die allgemeine Ableitungsformel

$$y = x^n \qquad y' = n * x^{n-1}$$

- Anmerkung

$$\underbrace{\binom{4}{0}}_{1} * x^4 * \Delta x^0 = x^4; \qquad \underbrace{\binom{4}{4}}_{1} * x^0 * \Delta x^4 = \Delta x^4$$

Aufgabe 2
Differenzieren Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der jeweils geeigneten Regeln (erste Ableitung bilden)

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 5$

Faktorregel: y = C * f(x) y' = C * f'(x)

$y' = 8x^3 - 9x^2 + 2$

---

b) $y = x * \sin(x)$

Produktregel: y = u(x) * v(x) y' = u'(x) * v(x) + v'(x) * u(x)

$y' = 1 * \sin(x) * + x * \cos(x)$

---

c) $x = e^t * \cos(t)$

Produktregel: y = u(x) * v(x) y' = u'(x) * v(x) + v'(x) * u(x)

$u(x) = e^t \qquad v(x) = \cos(t)$
$u'(x) = e^t \qquad v'(x) = -\sin(t)$

$y' = e^t * \cos(t) + [-\sin(t)] * e^t$
$y' = e^t * [\cos(t) - \sin(t)]$

---

d) $y = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 1x - 3}{x^3 - 5x}$

Quotientenregel: $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \qquad y' = \dfrac{u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)}{v(x) * v(x)}$

$u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1x - 3 \qquad v(x) = x^3 - 5x$
$u'(x) = 6x^2 - 12x + 1 \qquad v'(x) = 3x^2 - 5$

$$y' = \frac{[\ (6x^2 - 12x + 1) * (x^3 - 5x)\ ] - [\ (3x^2 - 5) * (2x^3 - 6x^2 + 1x - 3)\ ]}{(x^3 - 5x)^2}$$

e) $y = \frac{\ln(x)}{x^2}$

Quotientenregel: $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\quad y' = \frac{u'(x) * v(x) - v'(x) * u(x)}{v(x) * v(x)}$

$u(x) = \ln(x) \qquad v(x) = x^2$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v'(x) = 2x$

$$y' = \frac{(\frac{1}{x} * x^2) - [\ 2x * \ln(x)\ ]}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x * \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 * \ln(x)}{x^3}$$

---

f) $y = \sin^2(3x–5) \quad = \quad [\ \sin(3x – 5)\ ]^2$

Kettenregel: **y = F{u(x)} = f(z)** **y'= f'(z) * u'(x)**

Umformung und Anpassung an die Aufgabe

Kettenregel: **y = f{g[h(x)]} = f(u)**

f(u)	$= u^2$	u	= g(v) =	sin(v)	v = h(x)	3x – 5
f'(u)	= 2u	u'	=	cos(v)	v' =	3
$\frac{df(u)}{du}$		$\frac{dg(v)}{dv}$			$\frac{dv}{dx}$	

Ausrechnen

y' = 2u * cos(v) * 3

y' = 2 * sin(3x–5) * cos(3x–5) * 3

g) *Hinweis*

Der ARCTAN ist die Umkehrfunktion des Tangens

$\Rightarrow$ tan[arctan(x)] = tan(x) $\Rightarrow$ tan(x) = $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Wegen: [tan y]' $= 1 + \tan^2(y)$

Folgt: arctan(x)' $= \frac{1}{1+\tan^2[\ \arctan(x)\ ]} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2+1}$

Aufgabe

y = arctan(x^2+1)

Kettenregel: **y = F{u(x)} = f(u)** **y' =** $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

äußere Funktion: y = F(u) = arctan (u)
innere Funktion: y = u(x) = $x^2 + 1$

äußere Ableitung: $\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+(1+x^2)^2}$

innere Ableitung: $\frac{du}{dx} = 2x$

y' = $\frac{1}{1(1+x^2)^2}$ * 2x= $\frac{2x}{1(1+x^2)^2}$

---

h) y = $e^{x*\sin(x)}$

Substitution: g = g(x) = x * sin(x)

äußere Funktion: y = F(g) = $e^g \Rightarrow \frac{dy}{dg} = e^g$

y = e^x y' = e^x

innere Funktion: h = h(x) = x * sin(x)
nach Produktregel ableiten, da h(x) ein Produkt von zwei Funktionen ist

y' = u'(x) * v(x) + v'(x) * u(x)
h' = 1 * sin(x) + x* cos(x)

Kettenregel: y = F{u(x)} = f(u) y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

y' = e^g * [sin(x) + x * cos(x)]

y' = $e^{x*\sin(x)}$ * [sin(x) + x * cos(x)]

Aufgabe 3
Bilden Sie die zweite Ableitung der folgenden Funktionen

a) $y = 4x^3 + 3x + 7$

Summenregel – Summe von Potenzen

$y' = 12x^2 + 3$

$y'' = 24x$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Quotientenregel: $\mathbf{y} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\quad \mathbf{y'} = \dfrac{u'(x)*v(x) - v'(x)*u(x)}{v(x)*v(x)}$

$$y' = \frac{2x*(x^2+1) - 2x*(x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Zweite Ableitung bilden

$$y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$u(x) = 2x$ $\qquad v(x) = (x^2+1)^2$
$u'(x) = 2$ $\qquad v'(x)$ = nach Kettenregel ableiten
= äußere Ableitung * innere Ableitung
$v'(x) = 2 * (x^2+1)^1 * 2x$
$v'(x) = 4x * (x^2+1) * 2x$

$$y'' = \frac{u'*v - v'*u}{v^2} = \frac{2*(x^2+1)^2 - 4x*(x^2+1)*2x}{[(x^2+1)^2]^2}$$

$$= \frac{2*(x^2+1)(x^2+1) - 4x*(x^2+1)*2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)*[2*(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)*[(x^2+1)^3]}$$

$$= \frac{2*(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \underline{\frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}}$$

Aufgabe 3c)

$$y = f(x) = 4^{x*\sin(x)}$$

- Funktionsgleichung Logarithmieren

$\ln f(x) \quad = \quad \ln 4^{x*\sin(x)} \quad = \quad x* \sin(x) * \ln 4$

1. Ableitung y'

$y_1 \quad = \quad x * \sin(x)$
$y_1' \quad = \quad 1 * \sin(x) + x * \cos(x)$ | s. Aufgabe 2h

$y' \quad = y * [\sin(x) + x * \cos(x)] * \ln 4$ | s. Papula, Bd. 1, S. 327

$y' \quad = 4^{x*\sin(x)} [\sin(x) + x * \cos(x)] * \ln 4$

2. Ableitung y''

$y' \quad = 4^{x*\sin(x)} \quad * \quad [\sin(x) + x * \cos(x)] \quad * \quad \ln 4$

$\quad = \quad u(x) \quad * \quad v(x) \quad * \quad \ln 4$

$u \quad = 4^{x*\sin(x)}$
$u' \quad = \ln 4 * [\sin(x) + x * \cos(x)] \quad * \quad 4^{x*\sin(x)}$

$v \quad = \sin(x) * x + \cos(x)$
$v' \quad = \cos(x) + \cos(x) – x * \sin(X)$

$y'' \quad = \{ [u' * v + v' * u] * \ln 4 \}$

$y'' \quad = \{ [\underline{(\ln 4*(\underline{\sin(x)+x*\cos(x)}) * 4^{x*\sin(x)})} * \underline{(\sin(x) + x*\cos(x))} +$

$+ (2 * \cos(x) – x * \sin(x)) * 4^{x*\sin(x)}] * \ln4 \}$

$y'' \quad = \{ (\ln 4) * 4^{x*\sin(x)} * [\ln 4 * (\sin(x) + x * \cos(x))^2 + (2*\cos(x) – x * \sin(x)] \}$

Nebenrechnungen

$y_2 \quad = \quad \underset{u(x)}{x} \quad * \quad \underset{v(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \quad y_2' \quad = \quad 1 * \cos(x) + [–\sin(x)] * x$

$u = x \qquad u' = 1 \qquad v = \cos(x) \qquad v' = –\sin(x)$

Aufgabe 4

- In welchen Punkten der Kurve $y = x^3 + 3x^2 - 5x$ verlaufen die Tangenten (d.h. die 1. Ableitung) an die Kurve parallel zur Geraden $y = 2x$?

  In den gesuchten Punkten müssen die Ableitungen (die Steigungen) beider Kurven gleich sein, d.h. $y_1' = y_2'$

  $$y_1 = 1x^3 + 3x^2 - 5x \qquad y_2 = 2x$$
  $$y_1' = 3x^2 + 6x - 5 \qquad y_2' = 2$$
  $$y_1'' = 6x + 6$$

  Ableitungen Gleichsetzen

  $$y' = 3x^2 + 6x - 5 = 2 \quad |-2$$
  $$y' = 3x^2 + 6x - 7 = 0 \quad | /3$$

  Einsetzen in PQ-Formel

  $$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

  $$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{2}{2})^2 - (-\frac{7}{3})} = -1 \pm \sqrt{1+\frac{7}{3}} = -1 \pm 1{,}826$$

  $\underline{x_1 = 0{,}826}$ und $\underline{x_2 = -2{,}826}$

  Wir erhalten die x-Koordinaten, wo die Tangentensteigung = 2 ist.

- In welchen Punkten hat die Kurve eine waagerechte Tangente (Steigung=0) ?

  Am gesuchten Punkt muss die Ableitung (die Steigungen) der Kurve Null sein.

  $$y' = 3x^2 + 6x - 5 = 0 \quad | / 3$$
  $$y' = x2 + 2x - \frac{5}{3} = 0$$

  Einsetzen in PQ-Formel

  $$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{3}\right)} = -1 \pm \sqrt{1+\frac{5}{3}} = -1 \pm 1{,}632$$

$\underline{x_1 = 0{,}632}$ und $\underline{x_2 = -2{,}632}$

- Welche Besonderheiten weisen auf diese Punkte hin ?

  Solche Punkte mit waagerechter Tangente sind meistens relative Extremwerte.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ der durch die Bestimmungsgleichung

$$y^2 = (x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2)$$

implizit gegebene Funktion.

$[\,(x^2 + y^2)^2\,] \quad - \quad [\,2x*(x^2+y^2)\,] \quad = \quad y$

$[\,(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)\,]$ $\Rightarrow$ Ableitung nach der **Produktregel**

$y = u(x,y) \quad * \ v(x,y) \qquad y' = u' * v + v' * u$

$u = x^2 + y^2 \qquad u' = 2x + \mathbf{2*y*y'}$
$v = x^2 + y^2 \qquad v' = 2x + 2*y*y'$

Die Variable Y ist als eine Variable von X anzusehen,
daher Ableitung der Y-Terme nach der **Kettenregel**

$y_1' \quad = [\,(2x + 2y*y')*(x^2+y^2) + (2x + 2y*y')*(x^2+y^2)\,]$

$y_1' \quad = [\,2 * (x^2+y^2) * (2x + 2y*y')\,]$

$[\,2x*(x^2+y^2)\,]$ $\Rightarrow$ Ableitung nach der **Produktregel**

$u = 2x \qquad u' = 2$
$v = x^2 + y^2 \qquad v' = 2x + 2*y*y'$

$y2' \quad = u' * v + v' * u$

$y_2' \quad = [\,2 * (x^2+y^2) + (2x + 2y*y') * 2x\,]$

$$2*y*y' = 2*(x^2+y^2) * (2x + 2y*y') - 2*(x^2+y^2) - (2x + 2y*y')*2x$$

Auflösung **2*y*y'** nach **y'**

$$y' = \frac{(x^2+y^2)(2x-1)-2x^2}{-2y(x^2+y^2)+2xy+y}$$

$$2*y*y' = 2*(x^2+y^2) * (2x + 2y*y') - 2*(x^2+y^2) - (2x + 2y*y')*2x$$

- Klammern ausmultiplizieren

$$2yy' = 2(x^2+y^2) * 2x + 2(x^2+y^2) * 2yy' - 2(x^2-y^2) - (2x+2yy') * 2x$$

- Alle 2yy'-Terme auf die Linke Seite bringen

$$2yy' - 4(x^2+y^2)yy' + 4xyy' = 4x(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2) - 4x^2$$

- y' ausklammern

$$y' (2y - 4(x^2+y^2)*y + 4xy) = (4x-2)(x^2+y^2) - 4x^2$$

- Teilen durch den Ausdruck $(2y - 4(x^2+y^2)*y + 4xy)$

$$y' = \frac{(4x-2)(x^2+y^2)-4x^2}{2y-4(x^2+y^2)y+4xy}$$

- Faktor „2“ rauskürzen

$$y' = \frac{(x^2+y^2)(2x-1)-2x^2}{-2y(x^2+y^2)+2xy+y}$$

Aufgabe 6

An welchen Stellen besitzt die durch x = $\frac{t^2-1}{t^2+1}$, y = $\frac{t^3-t}{t^2+1}$ gegebene Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ eine waagerechte bzw. eine senkrechte Tangente?

Erst Papula-Mathebuch, Bd. 1, S.336-339 lesen
– Ableitung einer in Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) –

x = $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ y = $\frac{t^3-t}{t^2+1}$ $\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$ **| Zeitfunktion immer so $\dot{y}$ angeben**

a) *Ableitung von y*

nach Quotientenregel $\frac{u(x)}{v(x)}$ y = $\frac{u' * v - v' * u}{v^2}$

u = t^3 – t | u’ = $3t^2$ – 1 | v = t^2 +1 | v’ = 2t

$$\dot{y} = \frac{(3t^2-1)*(t^2+1)-2t(t^3-t)}{(t^2+1)^2} = \frac{(3t^2-1)*(t^2+1)-(2t^4-2t^2)}{(t^2+1)^2}$$

b) *Ableitung von x*

nach Quotientenregel $\frac{u(x)}{v(x)}$ y’ = $\frac{u' * v - v' * u}{v^2}$

u = t^3 – t | u’ = $3t^2$ – 1 | v = t^2 +1 | v’ = 2t

$$\dot{x} = \frac{2t*(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \frac{(2t^3+2t)-(2t^3-2t)}{(t^2+1)^2}$$

$$y' = \frac{(3t^4+3t^2-t^2-t)-(2t^4-2t^2)}{(t^2+1)^2} * \frac{(t^2+1)^2}{(2t^3+2t)-(2t^3-2t)}$$

$$y' = \frac{3t^4+3t^2-t^2-t-2t^4+2t^2}{2t^3+2t-2t^3+2t} = \underline{\frac{t^4+4t^2-1}{4t}}$$

c) *Waagerechte Tangente suchen*

Die waagerechte Tangente finden wir, wenn wir die erste Ableitung Null setzen, d.h. die Steigung = 0.

$$y' = \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{4t} = 0$$

$$y' = \frac{4t * (\frac{1}{4}t^3 + t - \frac{1}{4t})}{4t} = \frac{1}{4}t^3 + t - \frac{1}{4t} = 0 \quad | * 4t$$

$$y' = t^4 + 4t^2 - 1 = 0$$

- Wie löst man diese Gleichung ?
  Biquadratische Gleichung durch Substitution (s. Papula, Bd. 1, S. 12-13)

$Z = t^2$
$Z^2 + 4Z - 1 = 0$

$$Z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$Z_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - .(-1)} = -2 \pm \sqrt{5} = -2 \pm 2{,}24$$

$Z_1 = -2 + 2{,}24 = 0{,}24 \quad \wedge \quad Z_2 = -2 - 2{,}24 = -4{,}24$

- **Rücksubstitution**

$t_1^2 = Z_1 = 0{,}24 \Rightarrow t_1 = \sqrt{0{,}24} = \underline{+\ 0{,}49}$ $(\wedge -0{,}49)$

$t_2^2 = Z_2 = -4{,}24 \Rightarrow$ irrelevant

Am Punkt $t_1 = +\ 0{,}49$ existiert eine waagerechte Tangente !

- Einsetzen in die Definitionsgleichungen um den gesuchten Punkt zu erhalten

$$X = \frac{t_1^2 - 1}{t^2 + 1} = \frac{0{,}49^2 - 1}{0{,}49^2 + 1} = \frac{0{,}24 - 1}{0{,}24 + 1} = \frac{-0{,}76}{1{,}24} = -\underline{0{,}613}$$

$$Y = \frac{t^3 - 1}{t_1^2 + 1} = \frac{0{,}49^3 - 0{,}49}{0{,}49^2 + 1} = \frac{0{,}118 - 0{,}49}{0{,}24 + 1} = \frac{-0{,}372}{1{,}24} = -0{,}30$$

$$P \approx \begin{pmatrix} -0{,}613 \\ -0{,}300 \end{pmatrix}$$

d) *Senkrechte Tangente suchen*

> *Lösungshinweise*
> - Eine senkrechte Tangente findet man für y' $\rightarrow \infty$, wenn der Nenner von y' verschwindet, also $t_3 = 0$ ist.
> - Durch einsetzen der Werte in die Definitionsgleichung erhält man die Punkte der senkrechten Tangenten.

Fragen zu Ableitungsregeln

- Wann benötigen wir unbedingt die Kettenregel?

Antwort: Immer dann wenn die Variable nach der wir ableiten wollen von anderen Variablen abhängt, also verkettet ! $\Rightarrow$ f[u(x)]

- Wann benötigen wir den Logarithmus zum Ableiten?

Antwort: Wenn die Variable im Exponenten steht!

Ergänzende Hinweise

ad Aufgabe 5

- Implizite Form der Funktion

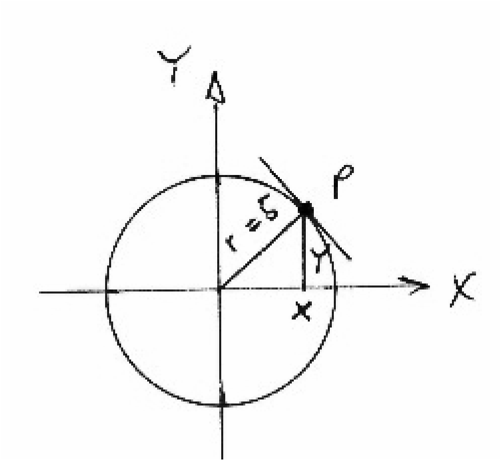
$$F = (x,y) = 0$$

- Vorgehensweise zur Bildung der Ableitung

1) Gliedweise Differentation der Funktionsgleichung F (x,y) = 0 nach x, wobei die Variable y als eine Funktion von x anzusehen ist. Jeder Term in der Funktionsgleichung, der die abhängige Variable y enthält, ist daher unter Verwendung der Kettenregel zu differenzieren.

2) Auflösung der differenzierten Funktionsgleichung nach $y' = \frac{dy}{dx}$ führt zur gesuchten Ableitung (Anstieg der Kurventangente)

3) Beispiel Kreisgleichung (s. Papula, S. 330f und 336f.)



- Darstellung in impliziter Form

F (x,y) = 0

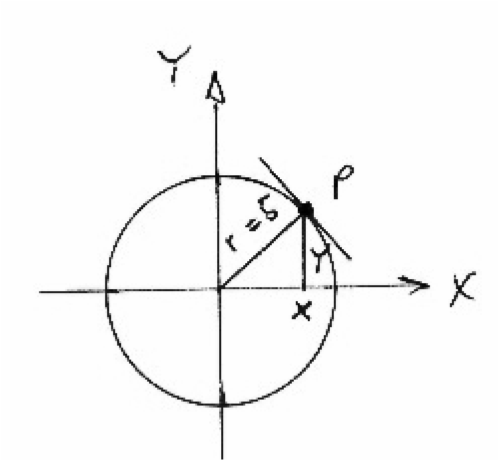
$F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$

$$\frac{d}{dx}\,[\,F(x,y)] = \frac{d}{dx}\,(x2 + y2 - 25) = 2x + 2y * y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

ad Aufgabe 6

Parameterdarstellung eines Mittelpunktkreises Winkelparameters t

– Beispiel aus Mathebuch „Papula“, Bd. 1, S. 337-338 –



$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 5 * \cos(t) \\ y(t) &= 5 * \sin(t) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 5 * \cos(\frac{\pi}{4}) = 3{,}54 \\ y_0 &= 5 * \sin(\frac{\pi}{4}) = 3{,}54 \end{aligned}\right\} = P_0\ (3{,}54 \mid 3{,}54)$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5 * \cos(t)}{-5 * \sin(t)} = -\cot(t)$$

$$m = y'(P_0) = y'(t_0 = \frac{\pi}{4}) = -\cot(\frac{\pi}{4}) = -1$$

$$m = \tan\alpha = -1 \Rightarrow 180° + \arctan(-1) = 180° - 45° = 135°$$