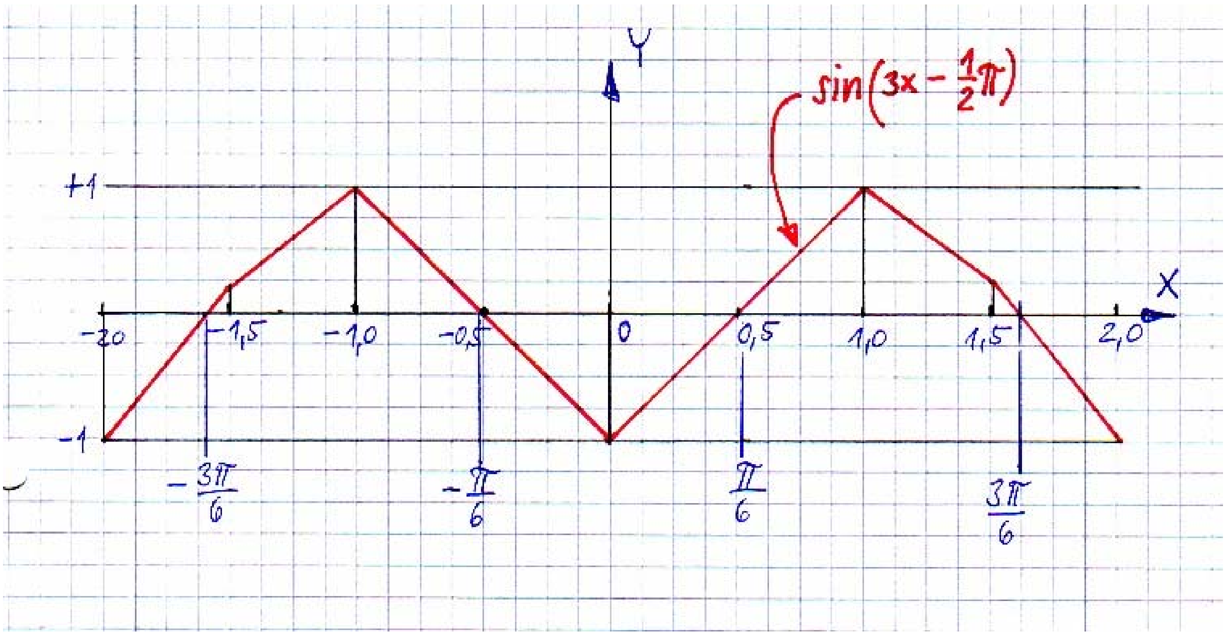
Aufgabe 1: Geben Sie die Nullstellen der Funktion f(x) = sin (3x – $\frac{1}{2}$ * Pi) an !

<u>Skizze:</u>



<u>Wertetabelle:</u>

X	3x	- ½ Pi	3x – ½ Pi	sin (3x – ½ Pi)
- 2,0	- 6,0	- 1,57	- 7,57	- 0,96
- 1,5	- 4,5	- 1,57	- 6,07	+ 0,21
- 1,0	- 3,0	- 1,57	- 4,57	+ 1,0
- 0,5	- 1,5	- 1, 57	- 3,07	- 0,07
0,00	0,00	- 1,57	- 1,57	- 1,0
+ 0,5	+ 1,5	- 1, 57	- 0,07	- 0,07
+ 1,0	+ 3,0	- 1,57	+ 1,43	+ 1,0
+ 1,5	+ 4,5	- 1,57	+ 2,93	+ 0,21
+ 2,0	+ 6,0	- 1,57	+ 4,43	- 0,96

Die Nullstellen der Funktion der Sinusfunktion sind diejenigen x-Werte, an denen das Argument der Sinusfunktion ein ganzzahliges Vielfaches von Pi ist.[1]

$$3x - \frac{1}{2} * Pi \quad = \quad k * Pi \qquad | \; k \in Z$$

$$3x \quad = \quad k * Pi + \frac{1}{2} Pi \quad = \quad 3x = (k + \frac{1}{2}) * Pi \qquad | \; k \in Z$$

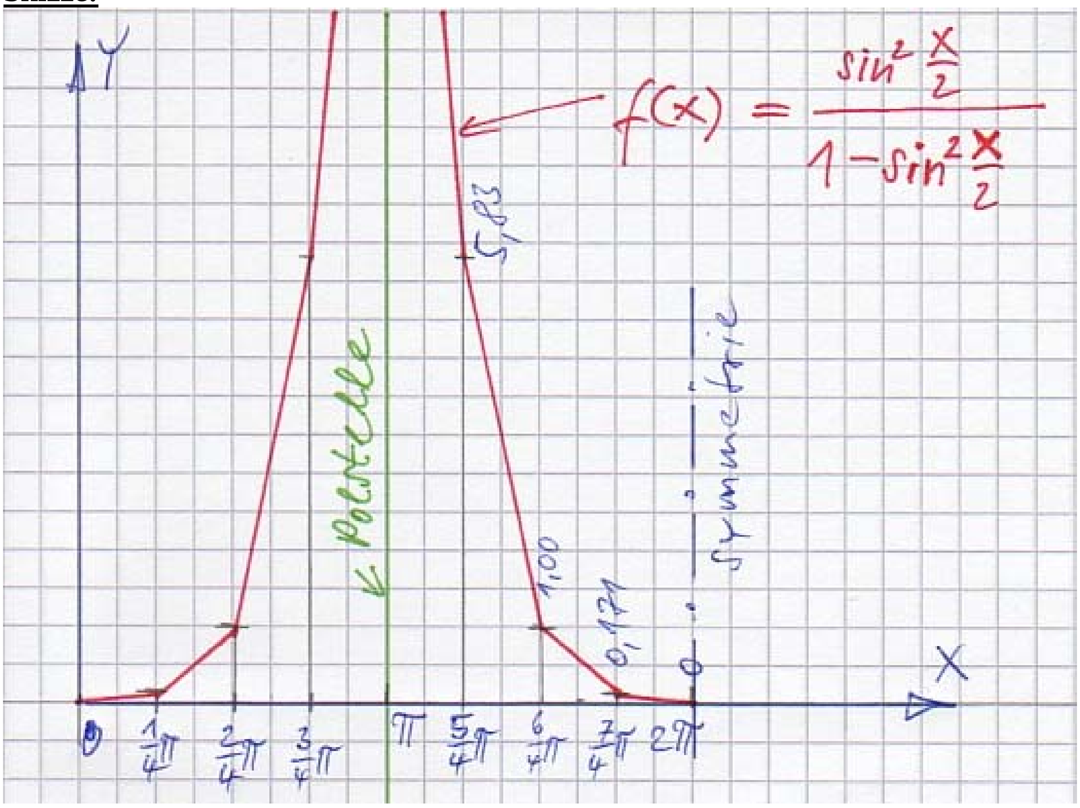
$$x \quad = \quad \frac{2k+1}{6} * Pi \qquad | \; k \in Z$$

[1] Vgl. Lösungsweg „Übungsblatt 7 / Aufgabe 1“ von Dozent Dr. Hoff.

Aufgabe 2: **Skizzieren Sie die Funktion** $f(x) = \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{1-\sin^2 x\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2}$.

Geben Sie die Periode dieser Funktion sowie ihre Nullstellen und Polstellen an.

<u>Skizze:</u>



<u>Wertetabelle:</u>

x	$\frac{x}{2}$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$1 - \sin^2 \frac{x}{2}$	$\dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$
0	**0**	**0**	**1**	**0**
1/4 Pi	**1/8 Pi**	**0,1464**	**0,8535**	**0,1715**
2/4 Pi	**2/8 Pi**	**0,5**	**0,5**	**1**
3/4 Pi	**3/8**	**0,8535**	**0,1464**	**5,08**
Pi	**½ Pi**	**1**	**0**	**POLSTELLE**
5/4 Pi	**5/8 Pi**	**0,8535**	**0,1464**	**5,08**
6/4 Pi	**6/8 Pi**	**0,5**	**0,5**	**1**
7/4 Pi	**7/8 Pi**	**0,1464**	**0,8535**	**0,1715**
2 Pi	**Pi**	**0**	**1**	**0**

Nullstellen: **x = 2k * Pi** | $k \in Z$
Polstellen: **x = (2k +1) * Pi** | $k \in Z$
Periode (s. Zeichnung)**:** **2*Pi** | **durch x/2 verlängert sich die Periode von Pi auf 2Pi**

Aufgabe 3: **Stellen Sie den Ausdruck f(t) = 2 cos (wt + $\frac{Pi}{4}$) + sin (wt – $\frac{7}{4}$ Pi) durch eine einzige Sinusfunktion dar.**

1) Vorgegebene Funktion

f(t) = 2 cos (wt + $\frac{Pi}{4}$) + sin (wt – $\frac{7}{4}$ Pi)

2) Umformung (s. Papula, Bd. 1, Kap. 9.4, S. 238f.)

cos x = sin (x + $\frac{1}{2}$ Pi)

3) Ergebnisfunktion

f(t) = 2 sin (wt + $\frac{Pi}{4}$ + $\frac{Pi}{2}$) + sin (wt – $\frac{7}{4}$ Pi)

f(t) = 2 sin (wt + $\frac{3}{4}$ Pi) + sin (wt – $\frac{7}{4}$ Pi)

4) Superposition zweier gleichfrequenter Schwingungen

Formel 1 (s. Papula, Bd. 1, S. 254)

A = $\sqrt{(A1 * A1) + (A2 * A2) + 2 * (A1 * A2) * \cos(winkel2 - winkel1)}$

A = $\sqrt{(2*2) + (1*1) + 2*(2*1)*\cos[(-\frac{7}{4}Pi) - (+\frac{3}{4}Pi)]}$

A = $\sqrt{(4) + (1) + 2*(2)*\cos(-\frac{10}{4}Pi)}$ = $\sqrt{4 + 1 + 4*\cos(-\frac{5}{2}Pi)}$ = $\sqrt{5 + 4*0)}$ = $\sqrt{5}$

A $\approx$ 2,24

5) Berechnung von $\tan^{-1}$-Winkel

Formel 1 (s. Papula, Bd. 1, S. 254)

$\tan^{-1}$ Winkel = $\frac{(A1 * \sin Winkel\_1) + (A2 * \sin Winkel\_2)}{(A1 * \cos Winkel\_1) + (A2 * \cos Winkel\_2)}$

$$\tan^{-1} \text{Winkel} = \frac{2*\sin(\frac{3}{4}Pi)+1*\sin(-\frac{7}{4}Pi)}{2*\cos(\frac{3}{4}Pi)+1*\cos(-\frac{7}{4}Pi)} = \frac{2*0{,}707+1*0{,}707}{2*(-0{,}707)+1*0{,}707} = \frac{2{,}12}{-0{,}707} \approx -3$$

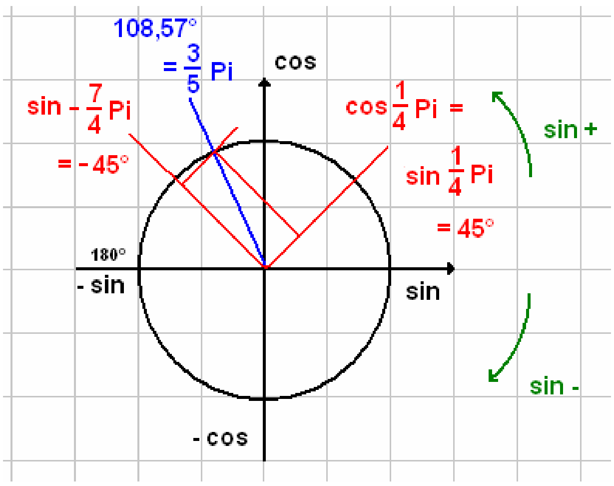
$$\tan^{-1} \text{Winkel} = \frac{2*(\frac{1}{2}*\sqrt{2})+1*(+\frac{1}{2}\sqrt{2})}{2*(-\frac{1}{2}*\sqrt{2})+1*(+\frac{1}{2}\sqrt{2})} = \frac{3*(\frac{1}{2}*\sqrt{2})}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \tan^{-1} \approx -3$$

An dieser Stelle liefert der Taschenrechner den Wert tan-1 = -3 = - 71,57°. Im Zeigerdiagramm sehen wir, dass der Vektor in Richtung der y-Achse zeigen muss. Der richtige Winkel ist also **-71,57° + 180°** ≈ **+ 108,57°** (s. Skizze). Im **Bogenmaß** sind **108,57°** ≈ $\frac{3}{5}$ *** Pi**.

6) <u>So gilt für die resultierende Schwingung</u>

f(t) = 2,24 * sin (wt + $\frac{3}{5}$ **Pi)**

<u>Zeigerdiagramm:</u>



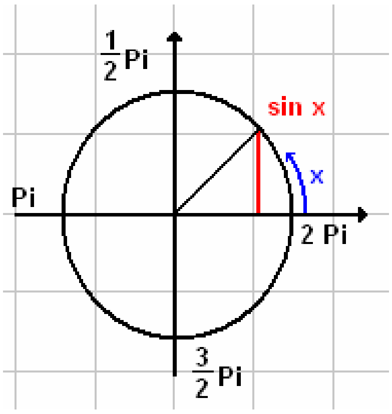
Besondere Werte – Grenzwerte - Umwandlungen

	0 0°	Pi/6 30°	Pi/4 45°	Pi/3 60°	Pi/2 90°
sin	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	**1**
cos	**1**	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tan	**0**	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**0**

sin ($\frac{3}{4}$*Pi) = 0,707 => 45° = $\frac{1}{2}$ * Wurzel 2

sin - $\frac{7}{4}$*Pi = -0,707 = -45°

Aufgabe 4: **Skizzieren Sie die Funktion f(x) = e^{x+1} * sin(2x) und geben Sie alle Nullstellen dieser Funktion an.**

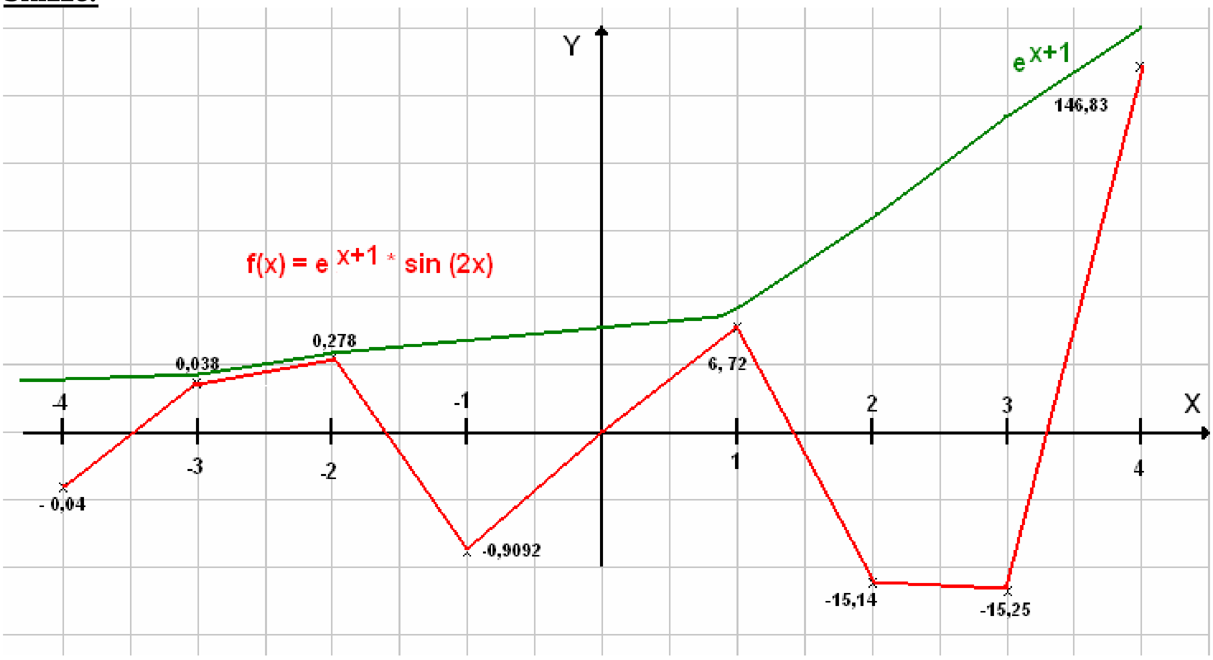


Eine Nullstelle ergibt sich immer dann für die Gesamtfunktion, wenn durch die Sinusfunktion **sin(2x)** ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Die e-Funktion besitzt keine Nullstellen, die e-Funktion **e^{x+1}** stellt eine Hüllfunktion der Sinusfunktion **sin (2x)** dar (s. Wertetabelle).

Nullstellen: **2x = k * Pi**

$$\Rightarrow x = \frac{k}{2} * Pi \qquad | \, k \in Z$$

Skizze:



Wertetabelle:

X	X+1	e^{X+1}	2X	SIN (2X)	e^{X+1}*SIN(2X)
- 4	- 3	0,05	- 8	- 0,989	- 0,04
- 3	- 2	0,135	- 6	+ 0,2794	+ 0,038
- 2	- 1	0,368	- 4	+ 0,7568	+ 0,278
- 1	0	1,00	- 2	- 0, 906	- 0,9092
0	1	2,72	0	0,00	0,00
+ 1	2	7,39	+ 2	+ 0,909	+ 6,72
+ 2	3	20,01	+ 4	- 0,7568	- 15,14
+ 3	4	54,60	+ 6	- 0,2794	- 15,25
+ 4	5	148,41	+ 8	+ 0,989	+ 146,83

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen

a) $2^x - 2^{-x} = 2$

$2x - \frac{1}{2^x} = 2$

<u>Substitution $2^x = Z$</u>

$Z - \frac{1}{Z} = 2$

$Z - \frac{1}{Z} - 2 = 0 \mid * Z$

$Z^2 - 2Z - 1 = 0$

<u>P-Q-Formel</u>

$$\boxed{Z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}$$

$Z_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - (-1)}$

$Z_{1/2} = +1 \pm \sqrt{1+1} = (1 \pm \sqrt{2})$

=> $1 \pm 1{,}4142$
=> $Z_1 = 2{,}4142$ und $Z_2 = -0{,}4142$

<u>Rücksubstituieren und anschließend Logarithmieren</u>

$x = \log_2 Z_1$

$x = \log_2 (1 \pm \sqrt{2})$

$x = \log_2 (Z_1) = \frac{\ln Z}{\ln 2} = \frac{0{,}88137}{0{,}6931} =$ <u>1,2716</u>

Z_2 geht nicht, da negative
Zahl nicht definiert; keine R.-Subst.

5b) <u>Formeln:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln \sqrt[n]{x^m} = \ln x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \ln x \\ \ln \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \ln x^{\frac{-m}{n}} \\ \ln (u*v) = \ln u + \ln v \\ \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v \end{array}}$$

<u>Aufgabe:</u>

$\ln \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3} \ln x = \ln (3x)$

$\ln \sqrt[3]{x^2} + \ln \sqrt[3]{x^1} = \ln 3 + \ln x$

$\ln (\sqrt[3]{x^2} * \sqrt[3]{x^1}) = \ln 3 + \ln x \qquad | - \ln x$

$\ln \sqrt[3]{x^3} - \ln x = \ln 3$

<u>e-Funktion hebt Logarithmus auf:</u>

$e^{\ln x - \ln x} = \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{x}{x} = 1 \qquad = \qquad e^{\ln 3}$

<u>1 = 3</u>

Aufgabe 6: Winkelberechnung

a) Winkel **phi = arcsin** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Winkel **phi =** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

c) Winkel **phi =** $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

d) Winkel **phi =** $\tan^{-1}\frac{Pi}{3}$

Besondere Werte – Grenzwerte - Umwandlungen

	0 **0°**	**Pi/6** **30°**	**Pi/4** **45°**	**Pi/3** **60°**	**Pi/2** **90°**
sin	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	**1**
cos	**1**	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tan	**0**	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**0**

Bsp. **sin 30° =** $\frac{1}{2}$

Aufgabe a)

1) *Taschenrechner*

DEG : Taste „1“ & Taste „/“ & Taste „ $\sqrt{\ }$ “ & Taste „2“ & Taste „SHIFT“ & Taste „sin“ & Taste „=“ 45°

2) *Berechnung*

180° – 45° = 135°

3) *Lösung*

$\mathbf{phi_1 = 45° =} \frac{Pi}{4}$ und $\mathbf{phi_2 = 135° =} \frac{3}{4}$ **Pi**

Aufgabe b)

Winkel $\mathbf{phi_1 = 1{,}047° =} \frac{1}{3}$ **Pi** und $\mathbf{phi_2 = -} \frac{1}{3}$**Pi**

RAD : Taste „1“ & Taste „/“ & Taste „2“ & Taste „3“ & Taste „SHIFT“ & Taste „cos“ & Taste „=“ 1,047°

Aufgabe c)

Winkel $\mathbf{phi_1 =}$ **– 19,47°** = **0,11*Pi** und $\mathbf{phi_2 =}$ **199,47 = 1,11*Pi**

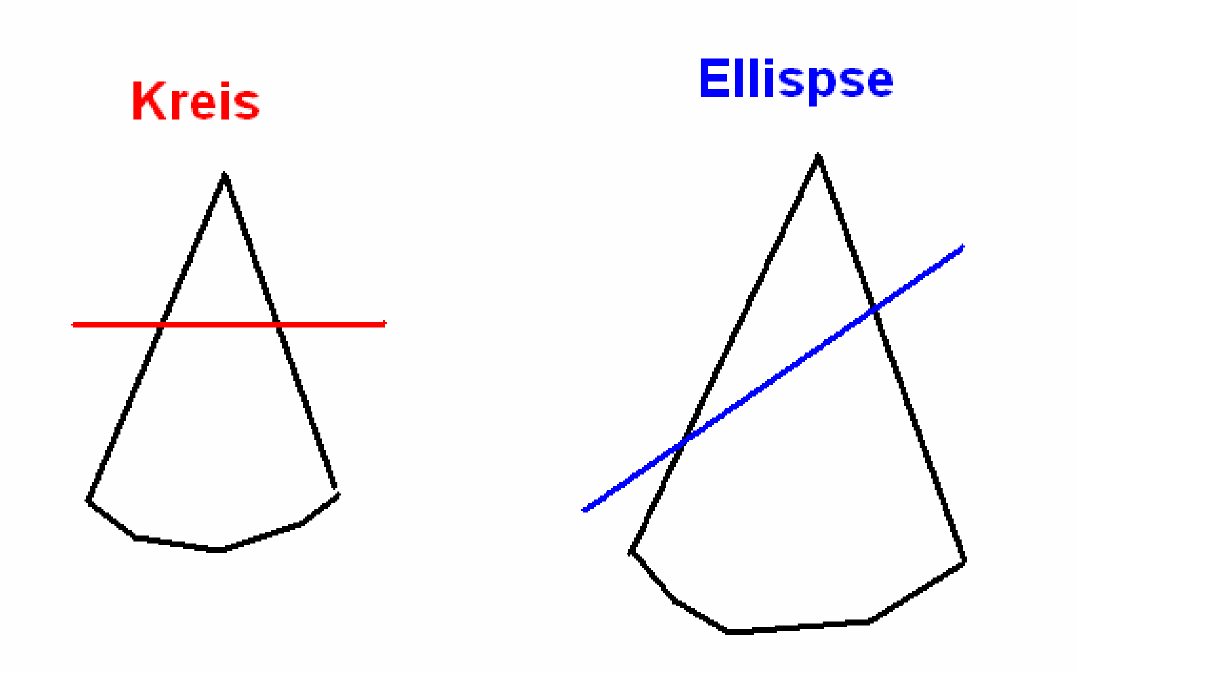
Taste „1“ & Taste „-“ & Taste „/“ & Taste „3“ & Taste „SHIFT“ & Taste „sin“ & Taste „=“ 19,47°

Aufgabe d)

Winkel $\mathbf{phi_1 =}$ **46,32°** = **0,26*Pi** und $\mathbf{phi_2 =}$ **226,32° = 1,26*Pi**

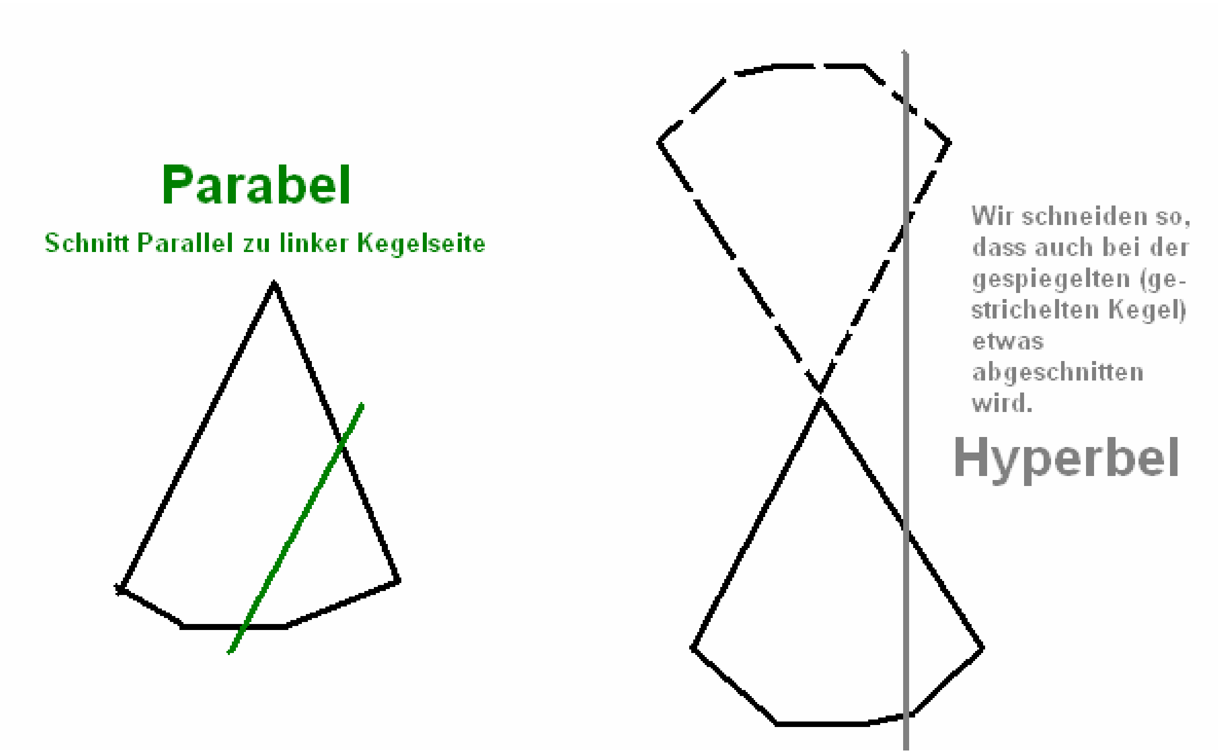
Taste „SHIFT“ & Taste „EXP“ (Pi) & Taste „/“ & Taste „3“ & Taste „SHIFT“ & Taste „tan“ & Taste „=“ 19,47°

Aufgabe 7: **Welche geometrische Figur wird durch die Gleichungen dargestellt?**



A=B

7b) $\mathbf{x^2 - 2x + 4y^2 + 8y = 2}$
$\mathbf{A*B = 1 * 4 = 4 > 0}$



7c) $\mathbf{(0x^2) - 2y^2 - 12y + 9x = 0}$
A=0 und B = -2

7a) $\mathbf{x^2 - y^2 - 4 = 0}$
$\mathbf{A*B = 1 * -1 = -1 > 0}$

Beispiele für Musterlösungen dieser Art: Papula, Bd.1, S. 225 – 229