## 1. Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer geeigneten Substitution:

1a) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} \cdot dx$

*Vorkenntnisse:*

Radius = 1 : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1^2$

Radius = 3 : $[3 * \sin(x)]^2 + [3 * \cos(x)]^2 = 3^2$

$[3 * \cos(x)]^2 = 3^2 - [3 * \sin(x)]^2$

$\underline{\underline{3 * \cos(x)}} = \sqrt{3^2 - [3 * \sin(x)]^2}$

*Nur Zähler betrachten und nach Pythagoras auswerten:*

$\sqrt{3^2 - [3 * \sin(x)]^2} = 3 * \cos(x)$ ; später durch Substitution: $3 * \cos(u)$

*Den Faktor unter der Wurzel $4x^2$ soll dem Ausdruck $[3 * \sin(x)]^2$ entsprechen:*

$4x^2 \equiv [3 * \sin(x)]^2$

- Vgl. Papula, Bd. 1, S. 430 : Tabelle 2 „*Integralsubstitutionen*“, Typ D: **x = …**

$$\int f\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot \sin(u) \\ dx = a \cdot \cos(u) \cdot du \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos(u) \end{cases}$$

- Nach Beispiel D die Substitution für unsere Aufgabe bilden.
- 4 ist ein konstanter Faktor und Variable „*a*“ bestimmen

$$4 * \overbrace{[a * \sin(x)]^2}^{x^2} = [3 * \sin(x)]^2$$

$$4 * a^2 * \sin^2(x) = 3^2 * \sin^2(x)$$

$$a^2 = \frac{3^2 * \sin^2(x)}{2^2 * \sin^2(x)} = \frac{3^2}{2^2}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{3}{2}}}$$

- Die gesuchte Variable „*a*“ besitzt den Wert 3/2 = 1,5.

*Wir Substituieren* $x = \frac{3}{2} * \sin(u)$ *, damit nach der Formel im Papula, S. 430, aufgelöst werden kann:*

- Differenzieren nach $\frac{dx}{du} = \frac{3}{2} * \cos(u)$ , da $\underline{\underline{x = \frac{3}{2} * \sin(u)}}$ ist
- Wir erstellen die Substitutionsgleichung: $dx = \frac{3}{2} * \cos(u) * du$ ,
  da $dx$ durch $du$ ausgedrückt wird.
- Substitution in Integral einsetzen

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} \cdot dx = \int \frac{\frac{3}{1} * \cos(u)}{\frac{3}{2} * \sin(u)} * \frac{3}{2} * \cos(u) * du$$

- Vereinfachen des Bruches

$$= \int \frac{\left[\frac{3}{1} * \cos(u)\right] * \left[\frac{3}{2} * \cos(u)\right] * du}{\frac{3}{2} * \sin(u)}$$

$$= \int \frac{3 * \cos(u)}{1} * \frac{2}{3 * \sin(u)} * \frac{3 * \cos(u)}{2} \quad = \quad \underline{\underline{3 \int \frac{\cos^2(u)}{\sin(u)} * du}}$$

*Durch Pythagoras ausdrücken um 2 einfache Integralen zu erhalten:*

$\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$

$$3\int \frac{1-\sin^2(u)}{\sin(u)} * du = 3\int \frac{1}{\sin(u)} * du - 3\int \frac{\sin^2(u)}{\sin(u)} * du = 3\int \frac{1}{\sin(u)} * du - 3\int \sin(u) * du$$

*Hinweis vom Aufgabenblatt 12:*

Sie können folgende Formel $\int \frac{1}{\sin(x)} \cdot dx = \ln\left|\frac{1}{\sin(x)} - \cot(x)\right| + C$ verwenden.

*Rücksubstitution mit Einsetzen:*

$$3 * \ln\left|\frac{1}{\sin(u)} - \cot(u)\right| + 3 * \cos(u) + C$$

*Ermittlung des Betrages von ln:*

$$x = \frac{3}{2} * \sin(u) \qquad \Rightarrow \qquad \sin(u) = \frac{2}{3}x$$

$$3*\cos(u) = \sqrt{3^2 - [3*\sin(u)]^2} = \sqrt{9-4x^2}$$

$$= \sqrt{3^2 - 3^2 * \sin^2(u)} = \sqrt{3^2[1-1*\sin^2(u)]} = 3\sqrt{1-\sin^2(u)}$$

$$\cos(u) = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}}}$$

*Einsetzen in ln:*

$$\cot(u) = \frac{\cos(u)}{\sin(u)} = \frac{1}{\tan(u)}$$

$$\left|\frac{1}{\frac{2}{3}x} - \frac{\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}}{\frac{2}{3}x}\right| = \left|\frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}\right)}{\frac{2}{3}x}\right| = \left|\frac{3\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}\right)}{2x}\right|$$

$$\left|\frac{3-3*\sqrt{1-\frac{4}{9}x^2}}{2x}\right| = \left|\frac{3-\sqrt{9*(1-\frac{4}{9}x^2}}{2x}\right| = \underline{\underline{\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right|}}$$

- die Zahl 2 unter dem Bruchstrich herausziehen und gesamtes Integral bilden:

$$\boxed{\text{Formel:} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad ; \quad b = 2}$$

$$3*\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| = 3*\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| - 3*\ln(2)$$

- Da der Term –3ln(2) ein konstanter Summand darstellt kann er zur Konstanten C hinzugefügt werden.

$$\underline{\underline{3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C}}$$

1b) $\int \frac{dz}{z * \ln(z)} \equiv \int \frac{f'(x)}{f(x)} * dx$

*Anmerkung um den Integrationstyp festzustellen:*

- vgl. Papula, Bd. 1, S. 430: Tabelle 2 „Integralsubstitutionen", Typ C: **u = …**

$y = \ln(z)$ ; $y' = \frac{1}{z}$

- Wir substituieren $\underline{\underline{u = \ln(z)}}$

*Substitutionsgleichung aufstellen:*

- Substitutionsgleichung $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$ ; $dz = du * Z$

*Wir setzen die Ergebnisse der Substitution in das Integral ein und bilden die Stammfunktione:*

| Substitution | Stammfunktion |
|---|---|
| $\int \frac{du * z}{z * u} = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} * du$ | $\ln(u) + C$ |

*Rücksubstitution:*

$\underline{\underline{\ln |u| + C = \ln |\ln(z)| + C}}$

1c) $\int x^2 * e^{x^3+1} * dx$

- Substitution von $u = x^3+1$
- Substitutionsgleichung aufstellen $\frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{3x^2}$

$$\int x^2 * e^u * \frac{du}{3x^2} = \int \frac{e^u * du}{3} = \frac{1}{3}\int e^u * du$$

- Integrieren / Stammfunktion bilden:

$$\frac{1}{3}\int e^u * du = \frac{1}{3} * e^u + C$$

- Rücksubstitution:

$$\underline{\underline{\int x^2 * e^{x^3+1} * dx = \frac{1}{3} * e^{x^3+1} + C}}$$

---

1d) $\int (1-x)^{\frac{1}{3}} * dx$

- Substitution u = (1-x) ; u' = – 1
- Substitutionsgleichung $\frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{-1} = -du$
- Einsetzen in Integral

$$\int (1-x)^{\frac{1}{3}} * dx = \int u^{\frac{1}{3}} * -du = -1\int u^{\frac{1}{3}} * du$$

- Ausintegrieren / Stammfunktion bilden

$$-1\int u^{\frac{1}{3}} * du = -1\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right] + C = -\frac{3}{4} * u^{\frac{4}{3}} + C$$

- Rücksubstitution

$$\underline{\underline{-1\int u^{\frac{1}{3}} * du = -\frac{3}{4} * (1-x)^{\frac{4}{3}} + C}}$$

## 2. Lösen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration / Produktintegration:

Integrationsformel: (vgl. Papula, Bd. 1, S. 435-436)

$$\int f(x)*dx = \int u(x)*v'(x)*dx = u(x)*v(x) - \int u'(x)*v(x)*dx$$

2a) $\int \underbrace{x}_{u} * \underbrace{\cos(x)}_{v'} * dx$

| | | |
|---|---|---|
| v | = | sin(x) |
| v' | = | cos(x) |
| u | = | x |
| u' | = | 1 |

$\int \cos(x)*dx = \sin(x)+C$

$\int \sin(x)*dx = -\cos(x)+C$

*Auswertung:* (s. Papula, Bd. 1, S. 419)

$$= \underbrace{x}_{u(x)} * \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} * \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} = x*\sin x + \underbrace{\cos(x)}_{Integral\ vom\ \sin(x)=-\cos(x)} + C$$

*Lösung:* x * sin(x) + cos(x) + C

---

2b) $\int \underbrace{x^2}_{v'} * \underbrace{\ln(x)}_{u} * dx$

| | | |
|---|---|---|
| v | = | $\frac{x^3}{3}$ |
| v' | = | $x^2$ |
| u | = | ln(x) |
| u' | = | $\frac{1}{x}$ |

$\int \cos(x)*dx = \sin(x)+C$

$\int \sin(x)*dx = -\cos(x)+C$

*Auswertung:*

$$= \ln(x)*\frac{x^3}{3} - \int \underbrace{\frac{1}{x}*\frac{x^3}{3}}*dx$$

$$= \frac{x^3}{3}*\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}*dx = \frac{x^3}{3}*\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

*Lösung:*

$$\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

2c) $\int \sin^2(x) * dx$

Integrationsformel: (vgl. Papula, Bd. 1, S. 435-436)

$$\int f(x) * dx = \int u(x) * v'(x) * dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x) * dx$$

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{u} * \underbrace{\sin(x)}_{v'} * dx$$

v = - cos(x)
v' = + sin(x)
u = sin(x)
u' = cos(x)

$$\int \cos(x) * dx = \sin(x) + C$$
$$\int \sin(x) * dx = -\cos(x) + C$$

*Auswertung:*

$$= \underbrace{\sin(x)}_{u} * \underbrace{[-\cos(x)]}_{v} - \int \underbrace{\cos(x)}_{u'} * \underbrace{[-\cos(x)]}_{v} * dx$$

$$= -\sin(x) * \cos(x) - \int -\cos^2(x) * dx$$

$$= -\sin(x) * \cos(x) + \int \cos^2(x) * dx$$

Nach Bronstein-Formelsammlung Nr. 314

$$\int \cos^2 ax * dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} * \sin(2ax)$$

$$= -\sin(x) * \cos(x) + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} * \sin(2x)$$

*Lösung:* $-\sin(x) * \cos(x) + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} * \sin(2x)$

## 3. Berechnen Sie (wenn möglich …)

3a) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \cdot dx$

- Substitution : $u = 2x \quad \Rightarrow \quad u' = 2$
- Substitutionsgleichung : $\frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot du$
- Variable Z, weil eine unbekannte Zahl gegen Unendlich geht (<u>kein</u> x) :

$$\lim_{Z \to -\infty} \int_{Z}^{0} \frac{1}{2} \cdot e^{u} \cdot du = \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{u} \right] + C$$

- Rücksubstitution :

$$\lim_{Z \to -\infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \right]_{Z}^{0}$$

- Grenzen einsetzen :

$$\lim_{Z \to -\infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot 0} - \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot Z} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2Z} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - e^{-2Z}\right)}_{\text{Grenzwert}}$$

$$\frac{1}{2}(1-0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

---

3b) $\lim_{Z \to \infty} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\right) + C$

$$\lim_{Z \to \infty} \left[ \overbrace{2 \cdot \sqrt{z}}^{\text{Obere Grenze}} - \overbrace{2 \cdot \sqrt{1}}^{\text{Unter Grenzen}} \right]_{1}^{Z} = \left[ 2 \cdot \sqrt{z} - 2 \right]_{1}^{Z}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Z = 25 ; | 5 * 2 – 2 | = | 8 |
| Z = 100; | 10 * 2 – 2 | = | 18 |
| Z = 1.000.000 ; | 1000 * 2 – 2 | = | $\underbrace{1998}$ |

Geht gegen Unendlich,
deshalb <u>kein</u> Grenzwert !

## 4. Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung der Formelsammlung !

4a) $\int \frac{dx}{4x^2 - x + 2} \quad = \quad \int \frac{1}{\underbrace{+4}_{a} \cdot x^2 \underbrace{-1}_{b} \cdot x \underbrace{+2}_{c}} \cdot dx$

- Nach Formel Nr. 40 in Bronstein berechnen, S. 89
- Es gilt die Formel Nr. 40a, weil $\Delta > 0$

> Formel: $X = ax^2 + bx + c$ ; $\Delta = 4ac - b^2$
> $\Delta = 4 \cdot 4 \cdot 2 - (-1)^2 = 32 - 1 = \underline{31}$
>
> Nr. 40a $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{X}} \cdot \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C$

- Einsetzen : $\underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{31}} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot x + (-1)}{\sqrt{31}}\right) + C}}$

---

4b) $\int \arccos(x) \cdot dx$

- Nach Bronstein Nr. 493

Formel: $\int \arccos \cdot \left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \arccos \cdot \left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$

oder nach Papula, Formelsammlung,

S. 403, Nr. 303

$\int \arccos(x) \cdot dx = \underline{\underline{x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}}}$

4c) $\int \sin[\ln(x)] \cdot dx$

- Nach Bronstein Nr. 485

$\int \sin[\ln(x)] \cdot dx =$

$\underline{\underline{\frac{x}{2} \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x) + C}}$

---

4d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 3}}$ | $a^2 = 3$ ; $a = \sqrt{3}$

- Nach Bronstein Nr. 270

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^2}} = \frac{2}{na} \cdot \ln \frac{a + \sqrt{x^n + a^2}}{\sqrt{x^n}} + C$$

- Einsetzen in obige Formel

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 3}} = -\frac{2}{4\sqrt{3}} \cdot \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x^4 + 3}}{\sqrt{x^4}} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x^4 + 3}}{x^2} + C}}$$

**5) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Parabeln** $y_1 = 6x - x^2$ **und** $y_2 = x^2 - 2x$ **begrenzt wird.**

*Nullstellen:*

$y_1 = -x^2 + 6x \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 6$ $\quad$ $y_2 = x^2 - 2x \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$

*Gleichsetzen der beiden Parabeln $y_1$ und $y_2$:*

$$\begin{aligned} 6x - x^2 &= x^2 - 2x && \mid +2x \\ 6x + 2x - x^2 &= x^2 \\ 8x - x^2 &= x^2 && \mid +\ x^2 \\ 8x &= 2x^2 && \mid :2x \\ 4 &= x \end{aligned}$$

*bzw.*

$\vdots$

$8x = 2x^2$
$4x = x^2$
$x_1 = 0 \wedge x_2 = 4$

*Fläche 1 ausrechnen, von 0 bis 2 mit Parabel $y_2$:*

Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, deshalb müssen wir nachher mit dem Betrag der Fläche rechnen, wenn wir die Gesamtfläche ausrechnen möchten.

$$A_1 = \int_0^2 x^2 - 2x * dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{3} * 2^3 - \frac{2}{2} * 4 = \frac{8}{3} - \frac{12}{3} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

*Fläche 2 ausrechnen, von 0 bis 4 mit Parabel $y_1$:*

$$A_2 = \int_0^4 -x^2 + 6x * dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 6\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\frac{1}{3} * 4^3 + 3 * 4^2 = -\frac{64}{3} + \frac{144}{3} = \underline{\underline{+\frac{80}{3}}}$$

*Fläche 3 ausrechnen, von 2 bis 4 mit Parabel $y_2$ integrieren:*

Wir müssen nachher diese Fläche von der Fläche 2 abziehen.

$$A_3 = \int_2^4 x^2 - 2x * dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^4 = \overbrace{\left[\frac{64}{3} - \frac{48}{3}\right]}^{Obergrenze} - \overbrace{\left[\frac{8}{3} - \frac{12}{3}\right]}^{Untergrenze} = \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{+\frac{20}{3}}}$$

*Gesamtfläche des Integrals berechnen:*

$$A = \overbrace{\frac{80}{3}}^{Fläche\ 2} - \overbrace{\frac{20}{3}}^{Fläche\ 3} + \overbrace{\frac{4}{3}}^{Fläche\ 1} = \underline{\underline{+\frac{64}{3}}}$$