1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x^2 + 2x + \frac{3}{x} \cdot dx \quad = \quad \underline{\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3 \cdot \ln|x| + C}$

b) $\int y^4 + 8y^3 + \sin y \cdot dy \quad = \quad \underline{\frac{y^5}{5} + 8\frac{y^4}{4} - \cos y + C}$

c) $\int 10^x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx \quad = \quad \underline{\frac{10^x}{\ln x} + \tan x + C}$

d) $\int \frac{1 - 3z^3 + z^5}{z} + 7 \cdot dz$

Bruch umformen in eine Summe bzw. Summenterme

$$\int \frac{1}{z} - \frac{3z^3}{z} + \frac{z^5}{z} + 7 \cdot dz \quad = \quad \int \frac{1}{z} - 3z^2 + z^4 + 7 \cdot dz$$

$$= \quad \ln z - \frac{3z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + 7z + C$$

$$= \quad \underline{\ln z - z^3 + \frac{z^5}{5} + 7z + C}$$

---

2. Berechnen Sie den Wert der bestimmten Integrale:

b) $\int_2^0 3 \cdot \left(1 - e^t\right) \cdot dt$

Hier sind die Integrationsgrenzen vertauscht worden, deshalb ändert sich auch das Vorzeichen des Ergebnisses.

$$\int_2^0 3 \cdot \left(1 - e^t\right) \cdot dt \quad = \quad 3\left[t - e^t\right]_2^0 \quad = \quad 3\left[\left(\overbrace{0 - 1}^{\text{obere Grenze}}\right) - \left(\overbrace{2 - e^2}^{\text{untere Grenze}}\right)\right]$$

$$= \quad 3[(-1) - (2 - 7{,}39)] \quad = \quad 3[-1 + 5{,}39] = 3[4{,}39] = \underline{13{,}17}$$

---

d) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}\right] = 4 - 2 = \underline{2}$

2. Berechnen Sie den Wert der bestimmten Integrale:

c) $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \cdot dx \quad = \quad \int_{-3}^{-1} x^{-2} - x^{-3} \cdot dx \quad = \quad \underline{\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right] + C} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Formel:} \qquad \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

$$\Rightarrow \quad = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right]_{-3}^{-1} = \overbrace{\left(-\frac{1}{-1} + \frac{1}{2(-1)^2} \right)}^{obere\ Grenze\ (-1)} - \overbrace{\left(-\frac{1}{-3} + \frac{1}{2(-3)^2} \right)}^{untere\ Grenze\ (-3)}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(+\frac{1}{3} + \frac{1}{18} \right) = \left(\frac{3}{2} = \frac{27}{18} \right) - \left(\frac{6}{18} + \frac{1}{18} \right)$$

$$= \frac{27}{18} - \frac{7}{18} = \frac{20}{18} = \underline{\frac{10}{9}}$$

Zwischenrechnung und Kontrolle von Aufgabe 2c:

$$\int \frac{1}{\underline{x^2}} \cdot dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = \underline{-\frac{1}{x}}$$

Kontrolle durch Differenzieren:

$$\boxed{\text{Formel:} \qquad y = +\frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}}$$

$$y = -\frac{1}{x} \qquad \underline{y' = +\frac{1}{x^2}}$$

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

Kontrolle durch Differenzieren mit Quotientenregel:

$$\underline{y = -\frac{1}{2x^2}} \qquad y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = -1 \ ; \ u' = 0 \\ v = 2x^2 \ ; \ v' = 4x \end{array} \right\} \quad y' = \frac{0 \cdot v - 4x \cdot (-1)}{\left(2x^2\right)^2} = \frac{4x}{4x^4} = \underline{\frac{1}{x^3}}$$

2. Berechnen Sie den Wert der bestimmten Integrale:

a) ***Vorkenntnisse:***

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 t}{2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{1-\cos^2 t}^{\sin^2 t \ \text{nach Pythagoras} \ ; \ \sin^2 x+\cos^2 x=1}}{2\cos^2 t} \cdot dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot dt$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t$$

Nach Bronstein Nr. 410 = $\int \tan^2 x \cdot dt = \underline{\tan x - x}$

Integration:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \cdot dt = \frac{1}{2}\left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[1-0{,}7854\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}2146\right] = \underline{0{,}1073}$$

---

3. Bestimmen Sie die Fläche, die zwischen der x-Achse und der Parabel $y = 4x - x^2$ liegt!

$y = 4x - x^2$

Berechnung der Nullstellen der Funktion,
daraus ergeben sich die Integrationsgrenzen !

$$4x - x^2 = 0$$
$$x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 4$$

Der Flächeninhalt ergibt sich durch die Nullstellen der Parabel und der von der x-Achse eingeschlossenen Fläche:

$$\text{A} = \int_0^4 4x - x^2 \cdot dx = \left[\overbrace{(2 \cdot 16) - \left(\frac{64}{3}\right)}^{\text{obere Grenze}}\right] - \left[\overbrace{0-0}^{\text{untere Grenze}}\right]$$

$$= \left[32 - \frac{64}{3}\right] = \frac{96}{3} - \frac{64}{3} = \underline{\frac{32}{3}}$$

4. Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel $\int \sin^3 x \; dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x + C$

Durch Ableiten der Stammfunktion kann man die Formel überprüfen, ob diese wahr ist, wenn $y' = \sin^3 x$ ergibt.

$$\underbrace{-\frac{2}{3}\cdot\cos^3 x}_{y_1} \quad - \quad \underbrace{\sin^2 x \cdot \cos x}_{y_2} \quad + \quad C$$

$$y_1 = -\frac{2}{3}\cdot\cos^3 x \qquad \Rightarrow \qquad \text{Substitution} \quad \cos x = u$$

$$\Rightarrow \qquad y_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot u^3 \qquad y_1' = -\frac{2}{3}\cdot 3u^2\cdot(-\sin x)$$

$$\underline{y_1' = 2\cdot\cos^2 x\cdot\sin x}$$

$$y_2 = \underbrace{-\sin^2 x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} \qquad ; \qquad y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$u = -\sin^2 x \quad ; \quad u' = -2\cdot\sin x\cdot\cos x$$

$$v = \cos x \quad ; \quad v' = -\sin x$$

$$y_2' = -2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x + (-\sin x)\cdot(-\sin^2 x)$$

$$y' = 2\cdot\cos^2 x\cdot\sin x - 2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x + \sin^3 x = \underline{\sin^3 x}$$

Die Formel ist wahr, da $y' = \sin^3 x$.