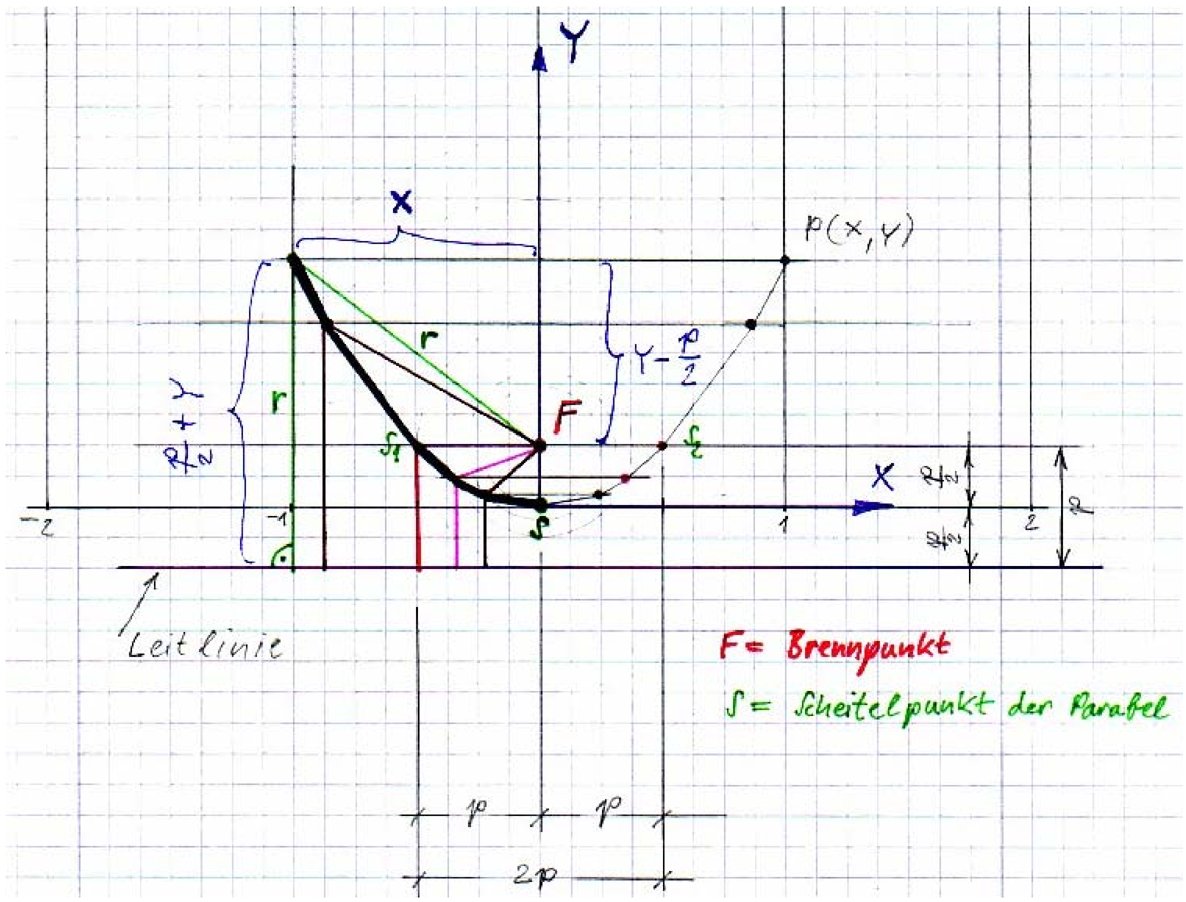
1. Bestimmen Sie Radius und Mittelpunkt des Krümmungskreises an die Parabel $y = x^2$ in ihrem Scheitelpunkt.



Allgemeine Gleichung der Scheitelpunktform einer Parabel $y - y_o = a(x - x_0)^2$

$x_0, y_0 \Rightarrow$ Koordinaten des Scheitelpunktes symmetrisch zur Y-Achse, die Parabel ist nach oben hin geöffnet. Vgl. Papula, Bd. 1, S. 185 u. 224.

$x^2 = 2py \quad \Rightarrow$ Koordinatensystem im Scheitelpunkt

$$y = \frac{x^2}{2p} = \frac{1}{2p} * x^2 = a * x^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2p}$$

Vorgegebene Parabel $y = x^2 = ax^2 \Rightarrow a = 1$

$$a = \frac{1}{2p} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Radius = $\frac{1}{2} = \frac{p}{2}$

Mittelpunkt = Brennpunkt = $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Allgemeine Form

$$\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2=\left(\frac{p}{2}+y\right)^2$$

da bei $x = 1$ und $y = x^2 = 1^2 = 1$

Wir setzen für $x = 1$ und $y = 1$

$$\left(1-\frac{p}{2}\right)*\left(1-\frac{p}{2}\right)+1=\left(\frac{p}{2}+1\right)*\left(\frac{p}{2}+1\right)$$

$$1-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2+1=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}+1$$

$$\underline{\underline{p=\frac{1}{2}}}$$

---

2. Bestimmen Sie alle relativen Extremwerte der Funktion $y = x^4 - 8x^2 + 16$

Ableitungen

$y = x^4 - 8x^2 + 16$
$y' = 4x^3 - 16x$
$y'' = 12x^2 - 16$
$y''' = 24x$

Nullstellen

$y = x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ | Substitution: $z = x^2$
$z^2 - 8z + 16 = 0$ | PQ-Formel
$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-16}$
$z_1 = 4 + 0$ und $z_2 = 4 - 0$ | Rücksubstitution $\sqrt{\ }$
$x_1 = 2$ und $x_2 = -2$
$x_3 = 2$ und $x_4 = -2$

Doppelte Nullstellen der Funktion sind bei $x = 2$ und $x = -2$

Extremwerte

$y' = 4x^3 - 16x = 0$
$x = 0$ und $4x^2 - 16 = 0$ | / 4
$x_1 = 0$ und $x^2 - 4 = 0$ | + 4
$x^2 = 4$ | $\sqrt{\ }$
$x_2 = 2$ und $x_3 = -2$

Gefundene Nullstellen der ersten Ableitung in die zweite Ableitung einsetzen um Extremwerte (Minima und Maxima) festzustellen. Vgl. Papula, Bd. 1, S. 365.

y''(0)	=	$12 * 0^2 - 16 = -16 < 0$	$\Rightarrow$	Maximum
y''(-2)	=	$12 * (-2)^2 - 16 = 48 - 16 = 32 > 0$	$\Rightarrow$	Minimum
y''(2)	=	$12 * 2^2 - 16 = 48 - 16 = 32 > 0$	$\Rightarrow$	Minimum

Nullstellen sind bei x= 0, x = 2 und x = – 2

y(0)	=	$x * 0^4 - 8 * 0^2 + 16 = 16$	$\Rightarrow$	Hochpunkt (0,16) $\Rightarrow$ Max.
y(2)	=	x * 24 – 8 * 22 + 16 = 0	$\Rightarrow$	Tiefpunkt (2,0) $\Rightarrow$ Min.
y(-2)	=	x * -24 – 8 -22 + 16 = 0	$\Rightarrow$	Tiefpunkt (-2,0) $\Rightarrow$ Min.

Die Funktion hat einen Hochpunkt bei HP (0,16) und zwei Tiefpunkte bei (2,0) und (-2,0).

---

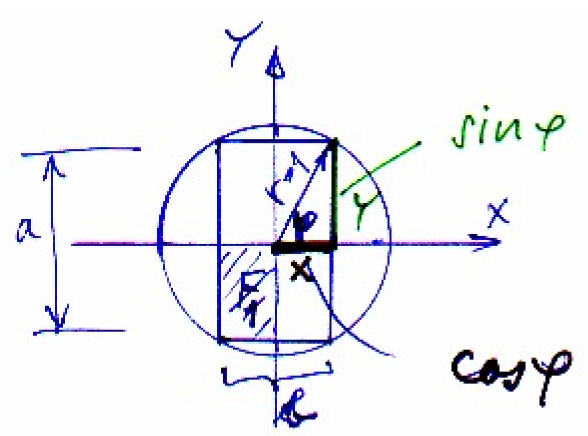
3. Welches der Rechtecke, deren Eckpunkte alle auf einem Kreis mit Radius *r* liegen, hat den größten Flächeninhalt? Geben Sie eine Formel für die Seitenlänge und den Flächeninhalt dieses Rechtecks an.

F = Fläche

F = F(x,y) = F(φ)

r = Radius

F(φ) = sin(φ) * cos(φ)



<u>Ableitung nach Produktregel</u>

F'(φ) = u' * v + v' * u

u = cos(φ)   u' = – sin(φ)

v = sin(φ)   v' = cos(φ)

<u>Waagerechte Tangente suchen</u>

$F'(\varphi) = -\sin(\varphi) * \sin(\varphi) + \cos(\varphi) * \cos(\varphi)$

$= -\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 0$

$\cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)$

$\Rightarrow \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi) \Rightarrow 45° \Rightarrow \underline{\underline{x = y}}$

<u>Die Seitenlänge beträgt</u>

$\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$a = b = 2 * \frac{1}{2}\sqrt{2} * r$

$F = a * b = \sqrt{2} * \sqrt{2} * r^2 = \underline{\underline{2 * r^2}}$

---

4. Sie sind Besitzer einer Blechfabrik und haben den Auftrag erhalten, eine Charge von zylinderförmigen Dosen mit einem Volumen von *1 Liter* zu produzieren. Wie müssen Sie die Maße der Dosen wählen, damit Ihr Blechverbrauch möglichst gering wird?

<u>Gegeben</u>

r = Radius der Dose

h = Höhe der Dose

V = Volumen der Dose = 1 Liter

F = Oberfläche der Dose

$V = r^2 * \pi * h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{r^2 * \pi}$

F = Mantelfläche + Boden + Deckel

$F = 2r * \pi * h + r^2 * \pi * 2$

Wir haben oben die Höhe durch $h = \frac{1}{r^2 * \pi}$ ausgedrückt, damit *F* nur noch von der Variablen *r* abhängig ist:

$$F(r) = 2\pi * r * \frac{1}{r^2 * \pi} + r^2 * \pi * 2 = \underline{\underline{2 * \frac{1}{r} + r^2 * \pi * 2}}$$

<u>1. Ableitung bilden</u>

Um ein Minimum herauszufinden, müssen wir die Funktion ableiten.

$$F' = \frac{-2}{r^2} + 2r * \pi * 2$$

An der Stelle wo das Minimum auftritt muss die Tangentensteigung Null sein. Deshalb müssen wir die erste Ableitung Null setzen und nach *r* auflösen:

$$-\frac{2}{r^2} + 4\pi * r = 0 \mid * \ r^2$$

$$-2 + 4\pi * r^3 = 0$$

$$4\pi * r^3 = 2$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2}{4\pi}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}}$$

Nebenrechnung

$$y = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{r^2}$$

Ableitung nach Quotientenregel

$$y = \frac{1}{x} = \frac{u}{v} = \frac{u' * v - v' * u}{v^2}$$

u = 1 u' = 0

v = x v' = 1

$$y' = \frac{0 * x - 1 * 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Ableitung bilden

Wenn die zweite Ableitung am Punkt $x_o = r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ > 0 ist, dann liegt ein relatives Minimum vor:

F' = $-\frac{2}{r^2} + 4r * \pi$

F'' = $\frac{4}{r^3} + 4\pi \Rightarrow$ F''(r) > 0, Minimum

F''(0,542) = $\frac{4}{0{,}542^3} + 4 * \pi = 18{,}85 > 0$

Nebenrechnung

$y = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{4}{x^3}$

Ableitung nach Quotientenregel

$y' = \frac{u' * v - v' * u}{v^2}$

u = -2 u' = 0
v = x^2 v' = 2x

$y' = \frac{0 * x^2 - 2x * (-2)}{(x^2)^2} = \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$

Kontrolle

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx \sqrt[3]{0{,}159} = 0{,}542$ | $0{,}542^3 = 0{,}159$

$V = r^2 * \pi * h = 1 \Rightarrow \quad h = \frac{1}{r^2 * \pi} = \frac{1}{0{,}542^2 * \pi} = 1{,}084$

$V = 0{,}542^2 * \pi * 1{,}084 = 1{,}0004$

Nebenrechnung

$r = \sqrt[3]{0{,}16} = 0{,}542$ habe ich durch Probieren erhalten wie folgt

$\sqrt[3]{8}$; 8 = 2 * 2 * 2
$\sqrt[2]{0{,}16} = 0{,}4$ | weil 0,4 * 0,4 = 0,16

$\sqrt[3]{0{,}16} = 0{,}5$ geschätzt		$0{,}5^3 = 0{,}125$
0,55		$0{,}55^3 = 0{,}166$
0,54		$0{,}54^3 = 0{,}157$
r = 0,542 dm	= 5,42 cm	$0{,}542^3 = 0{,}159$

5. Diskutieren Sie den Verlauf der folgenden Funktionen:

Abb. 5a

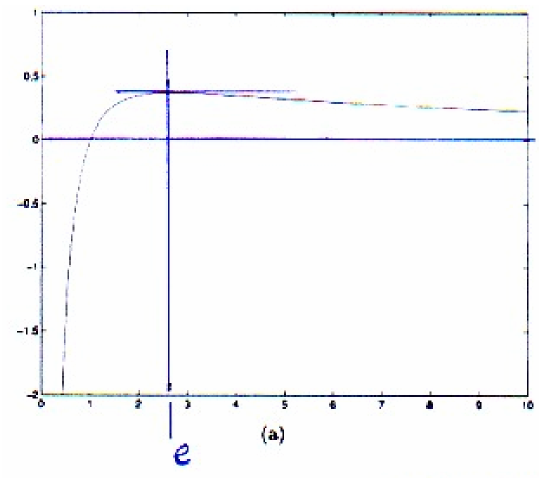
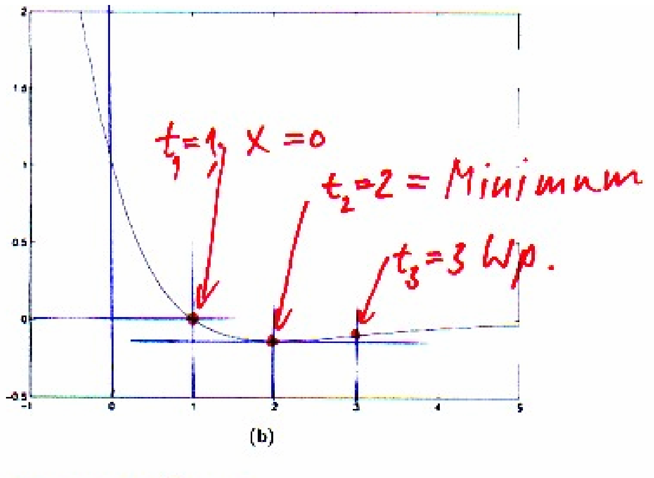


Abb. 5b



Aufgabe 5a)

Definitionsbereich

$D =]0,\infty[$

Ableitungen bilden

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} * x - 1 * \ln x}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1-\ln x}{x^2}}}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} * x^2 - [2x * (1-\ln x)]}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x * \ln x}{x^4} = \frac{x * [-1 - 2 + 2 * \ln x]}{x * x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

Nullstellen der Stammfunktion

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\ln x = e^{\ln x} = 1$$

Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und $y = 0$.

Polstellen der Funktion

x = 0

Es existiert eine Polstelle mit senkrechter Asymptote bei *x = 0* .

Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \quad | * x^2$

$1 - \ln x = 0$
$\ln x = 1$

$\underbrace{1 - \ln x}_{\text{nur bei } x = 2{,}718 \text{ ist } \ln x = 1, \text{ dann ist die Gleichung erfüllt}} \Rightarrow$ Nullstellen bei *e = 2,718*

$\Rightarrow$ da, 1 = ln x

Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$y'' = \frac{-3 + 2 * \ln x}{x^3}$

$\frac{-3 + 2 * \ln x}{x^3} = 0 \quad | * x^3$ (für Kurvendiskussion)

$-3 + 2 * \ln x = 0$
$\ln x = \frac{3}{2} = 1{,}5$
$x = e^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 4{,}4817}}$

> *Hinweis*
>
> $\log_{10} 100 = 2$
>
> $\log_a b = k$
>
> $a^k = b$
>
> $10^2 = 100$

Extremwerte (Nullstellen der ersten Ableitung)

$y = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = 0{,}3679$

Ein relatives Maximum befindet sich bei am Punkt $\left(e \,|\, \frac{1}{e} \right)$ = (2,7183 | 0,3679).

Wendepunkte (Nullstellen der zweiten Ableitung)

$y = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}$

Ein Wendepunkt mit rechts-links Krümmung befindet sich am
Punkt (4,4817 | 0,3347).

Wertebereich

$W =]-\infty, \frac{1}{e}[$

Asymptote im Unendlichen

Asymptote ist die x-Achse (*y = 0*)

Aufgabe 5b)

Definitionsbereich

$D =]-\infty, \infty[$

Ableitungen bilden

$x = (1-t)*e^{-t}$

Formel	$y = e^{-t}$ $y' = -e^{-t}$

$\dot{x} = [-1*e^{-t}] + (1-t)*(-e^{-t}) = -e^{-t} + (1-t)*(-e^{-t})$ = $\underline{\underline{(t-2)*e^{-t}}}$

$\ddot{x} = e^{-t} + (1-t)*(-e^{-t}) + (-1*e^{-t})*-e^{-t}$

$\ddot{x} = e^{-t}*[1+(1-t)*1+(1)] = e^{-t}*[1+1+1-t]$ = $\underline{\underline{(3-t)*e^{-t}}}$

bzw. $\ddot{x} = e^{-t} + (-e^{-t})*(t-2) = \underline{\underline{(3-t)*e^{-t}}}$

Nullstellen der Stammfunktion

$x = (1-t)*e^{-t} = 0$
$1-t = 0$
$\underline{\underline{t = 1}}$

Die Funktion hat eine Nullstelle bei $t = 1$ und $x = 0$.

Polstellen der Funktion

Es existieren keine Polstellen

Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung

$\dot{x} = (t-2)*e^{-t} = 0$
$t-2 = 0$
$\underline{\underline{t = 2}}$

Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$\ddot{x} = (3-t) * e^{-t} = 0$
$3 - t = 0$
$\underline{\underline{t = 3}}$

Extremwerte (Nullstellen der ersten Ableitung)

$x = (1-2) * e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2} = -0{,}135$

Ein relatives Minimum befindet sich bei am Punkt $\left(2 \mid -\dfrac{1}{e^2}\right)$ = (2 | -0,135).

Wendepunkte (Nullstellen der zweiten Ableitung)

$x = (1-3) * e^{-3} = -\dfrac{2}{e^3} = -0{,}1$

Ein Wendepunkt mit links-rechts Krümmung befindet sich am Punkt (3 | -0,1).

Asymptote im Unendlichen

Die Asymptote für $t \to \infty$ ist die t-Achse (*x = 0*) und für $t \to -\infty$ existiert keine Asymptote.

Wertebereich

$W = [-\dfrac{1}{e^2}, \infty[$

6. Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Tangentenverfahren den Schnittpunkt der beiden Kurven

$$f(x) = x^2 + 2$$
$$g(x) = e^x$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-3}. Prüfen Sie dafür zunächst, ob der Punkt $x = 1{,}5$ als Startwert geeignet ist. Rechnen Sie jeweils mit mindestens vier Nachkommastellen.

> Newtonsche Nährungsformel: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ $\quad$ $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$
>
> Beim Newtonsche Verfahren wird von einem Punkt P_1 (x_1, y_1) ausgegangen, der nahe an der x-Achse (senkrecht auf x-Achse, namens *A*) liegt. Die Tangente im Punkt $P_1(x_1, y_1)$ schneidet die x-Achse in einem zweiten Punkt *B* und ergibt die Nährungslösung. Die Größe von x_2 wird aus einem Dreieck BAP_1 ermittelt, indem man die Steigung des Winkels *tan alpha*$_1$ bestimmt. *tan alpha*1 = f'(x) = $f(x_1)/(x_1-x_2)$ Einsetzen in Formel und Wiederholung des verfahren. Contra-Methode zur „regula falsi".
>
> Kusch, L., *Mathematik für Schule und Beruf. Teil 3 Differentialrechnung*, S. 228-229.

Umformen der Gleichungen: h(x) = f(x) + g(x) h(x) = 0

$$h(x) = x^2 + 2 - e^x = 0$$

Überprüfen ob der Wert x = 1,5 als Startwert geeignet ist mit folgender Formel:

$$\left| \frac{f(x_0) * f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| \langle\ 1$$

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x \Rightarrow f(1{,}5) = -0{,}2317$$
$$f'(x) = 2x - e^x \Rightarrow f'(1{,}5) = -1{,}4817$$
$$f''(x) = 2 - e^x \Rightarrow f''(1{,}5) = -2{,}4817$$

Einsetzen in Formel

$$\left| \frac{f(x_0) * f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| = \left| \frac{(-0{,}2317) * (-2{,}4817)}{(-1{,}4817)^2} \right| = 0{,}2619\ \langle\ 1$$

Dadurch ergeben sich durch die Newtonsche Nährungsformel (Iterationsformel) folgende Nährungswerte:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$f''(x_{n-1})$
1	1,5	-0,2317	-1,4817	1,3436
2	1,3436	-0,0276	-1,1456	1,3195
3	1,3195	-0,0005	-1,1026	1,3190
4	1,3190	0,0	---	---

Die einzige Lösung der zusammengesetzten Gleichung $h(x) = x^2 + 2 - e^x = 0$ liegt an der Stelle $x = 1{,}3190$. Vgl. Papula, Bd. 1, S. 387-390.