Lineare Funktionen

Definition und Eigenschaften

Unter einer Funktion versteht man eine Abbildung, die jedem Element einer Menge **D** (der Definitionsmenge) genau ein Element einer Menge **W** (der Wertemenge) zuordnet.

Eine Funktion ist in der Regel durch eine **Funktionsgleichung** gegeben, die z.B. von folgender Form ist: $f(x) = x^2$. x^2 heißt dann **Funktionsterm**.

Eine Abbildung f: x -> f(x) heißt **lineare Funktion** [bzw. Gerade], wenn ihre Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot x + b$ [oder häufig auch $y = m \cdot x + b$] geschrieben werden kann. Diese Schreibweise der Geradengleichung heißt **Normalform**.

Die zugehörige Darstellung aller Wertepaare x und f(x) im rechtwinkeligen Koordinatensystem heißt **Graph** der Geraden.

- Der Faktor m heißt **Steigung** der Geraden.
- Die Zahl b heißt **konstantes Glied** und bestimmt den Achsenabschnitt des Graphen auf der y-Achse (y-Achsenabschnitt).

Die **Steigung** einer Geraden lässt sich aus den Koordinaten zweier verschiedener Punkte $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$, die auf dieser Geraden liegen, berechnen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Es sei f eine lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x + b$. Der Graph der Funktion heißt

- **steigend**, wenn a > 0,
- **fallend**, wenn a < 0 und
- **parallel zur x-Achse mit dem Abstand b**, wenn a = 0.

Es sei f eine lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x + b$. x_0 heißt **Nullstelle** der Funktion f, wenn $f(x_0) = 0$, d.h. $x_0 = -\frac{b}{a}$, wenn $a \neq 0$.

Liegt speziell die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x$ vor, so spricht man von einer **proportionalen Funktion**.

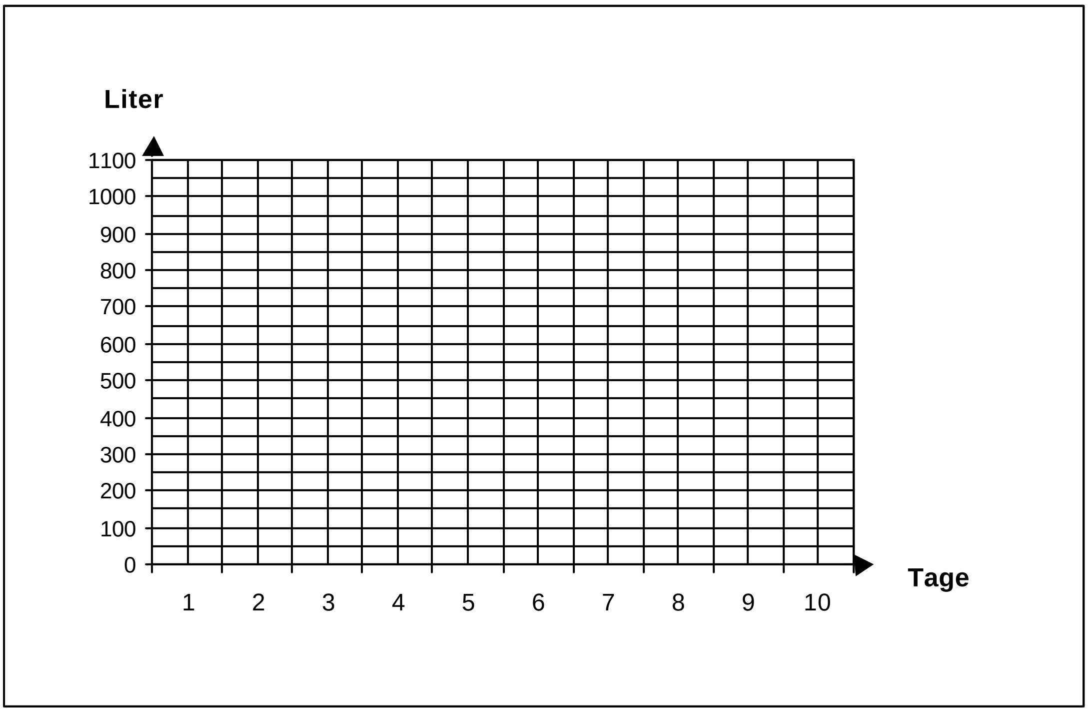
Liegt speziell die Funktionsgleichung $f(x) = x$ vor, so spricht man von einer **identischen Funktion**.

Liegt speziell die Funktionsgleichung $f(x) = b$ vor, so spricht man von einer **konstanten Funktion**.

Aufgaben zu linearen Funktionen

Aufgabe 1

In einem Tank befinden sich 1050 Liter Wasser. Pro Tag werden 180 Liter herausgepumpt.



a) Fülle die Tabelle aus:

Tage	0	1	2	3	4	5
Liter						

b) Zeichne den Graphen der Zuordnung Zeit in Tagen $\rightarrow$ Wassermenge in Liter in das vorbereitet Koordinatensystem.

c) Gib die Zuordnungsvorschrift an.

d) Wann ist der Tank leer?

Aufgabe 2

Definiere den Begriff „Funktion“.

Aufgabe 3

Zeichne den Graphen der Funktion mit Hilfe einer Wertetabelle!

a) $f(x) = \frac{3+x}{3-x}$ b) $f(x) = x^2 - 1$

Aufgabe 4

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind; korrigiere ggf. die falschen Aussagen.

a) Die Funktion h ist gegeben durch die Funktionsvorschrift $h(x)=3x-1$. Dann erhält man den Funktionswert an der Stelle *x=2*, indem man den Wert für x in die Vorschrift einsetzt und den Funktionswert ausrechnet, also $h(2)=3\cdot 2-1=5$.

b) Die folgenden Wertepaare sind alle Wertepaare der Funktion $f(x)=6x-10$.

x	-2	-1	0	1	4
f(x)	-22	-16	-9	-4	14

c) Um den Funktionsgraphen zur Funktionsvorschrift zu zeichnen, muss man zunächst eine Wertetabelle mit mehreren Wertepaaren *(x/g(x))* erstellen.

d) Lineare Funktionen haben die allgemeine Funktionsvorschrift $f(x)=mx$.

e) Eine lineare Funktion kann durch eine Funktionsvorschrift oder durch eine Funktionsgleichung gegeben sein.

f) Die Funktion f ist durch die Gleichung $y=-2x-3$ gegeben. Der Graph von f ist eine Gerade, die die y-Achse an der Stelle y=-2 schneidet und die Steigung –3 hat.

g) Der Graph zur Gleichung $y=3x$ ist eine Ursprungsgerade.

h) Der Graph zur Gleichung $y=3x-2$ ist eine Ursprungsgerade.

i) Die Steigung einer Geraden kann man ablesen, wenn man zwei Punkte der Geraden nimmt, zwischen ihnen das Steigungsdreieck einzeichnet und den Quotienten von Höhenunterschied durch Horizontalabstand bildet.

Aufgabe 5

Zeichne die Graphen zu den folgenden Funktionen!

a) $f(x)=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{2}$

b) $f(x)=3x-1$

c) $f(x)=-\frac{2}{3}x+1$

d) $f(x)=-3$

e) $f(x)=4{,}5x+2$

Aufgabe 6

Eine Gerade verläuft durch die Punkte P(3/7) und Q(-2/-3). Bestimme rechnerisch ihre Funktionsvorschrift. Überprüfe durch eine Zeichnung.

Aufgabe 7

Eine Gerade habe die Steigung 2 und verläuft durch den Punkt A(-3/-5). Bestimme die Funktionsvorschrift rechnerisch und zeichnerisch.

Aufgabe 8

Ist die Gleichung $3x-4y-8=0$ auch eine Gleichung, die eine lineare Funktion darstellt?

Aufgabe 9

Zeichne die Gerade, die durch die Punkte A(1/4) und B(4/2,5) verläuft und bestimme anschließend die zugehörige Funktionsvorschrift. Überprüfe das Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe 10

Liegen die Punkte A(2/3), B(-3/-8), C(0/1) und D(5/7) oberhalb, unterhalb oder auf der Geraden zu $y=2x-1$.

Aufgabe 11

Bestimme die Gleichung der Geraden, die

a) durch P(-5/1) und Q(7/-3) verläuft,

b) durch A(2/3) verläuft und zur Geraden $y = \frac{1}{2}x + 2001$ parallel ist.

Aufgabe 12

Gegeben ist die Gleichung $x - 2y + 4 = 0$.

a) Bringe die Gleichung auf Normalenform.

b) Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen.

c) Gib die Steigung der Geraden an.

d) Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 13

Bringe die Gleichungen auf Normalenform und zeichne!

a) $2x - y + 1 = 0$ b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -1$

Aufgabe 14

Bestimme die Funktionsvorschrift der folgenden Geraden!