Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

1. Lagebeziehungen zwischen Geraden

Gegeben seien zwei Geraden zu
$$g_1\colon\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \boldsymbol{l}\vec{a}$$
$$g_2\colon\ \vec{x} = \vec{x}_2 + m\vec{b}$$

(1) Man untersucht zuerst die Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b}$ auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit:

Sind die Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b}$ linear abhängig, dann sind die Geraden g_1 und g_2 parallel oder identisch. Um dies zu entscheiden, untersucht man dann, ob die Differenz der Ortsvektoren $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ linear abhängig bzw. unabhängig von den Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b}$ ist:

a) Sind $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ linear abhängig, dann sind die Geraden g_1 und g_2 identisch.

b) Sind $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ linear unabhängig, dann sind die Geraden g_1 und g_2 parallel.

(2) Sind die Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b}$ linear unabhängig, dann sind die Geraden g_1 und g_2 windschief oder haben einen Schnittpunkt S. Dies entscheidet man am einfachsten, indem man eine Schnittpunktberechnung durchführt (d.h. Gleichsetzen der beiden Parametergleichungen). Setzt man die Lösung des daraus entstehenden Gleichungssystems in eine der Parametergleichungen ein, so erhält man S. Führt das Gleichungssystem auf einen Widerspruch, dann sind die Geraden g_1 und g_2 windschief

2. Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

Gegeben seien eine Gerade und eine Ebene zu
$$g\colon\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \boldsymbol{l}\vec{a}$$
$$\boldsymbol{e}\colon\ \vec{x} = \vec{x}_2 + m\vec{b} + \boldsymbol{h}\vec{c}$$

(1) Man untersucht zuerst die Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit:

Sind die Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig, dann sind die Gerade g und die Ebene ε parallel, oder die Gerade g liegt in der Ebene ε. Um dies zu entscheiden, untersucht man dann, ob die Differenz der Ortsvektoren $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ linear abhängig bzw. unabhängig von den Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ist:

a) Sind $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ linear abhängig, dann liegt die Gerade g in der Ebene ε.

b) Sind $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ linear unabhängig, dann sind die Gerade g und die Ebene ε parallel.

(2) Sind die Richtungsvektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear unabhängig, dann haben die Gerade g und die Ebene ε einen Schnittpunkt S. Diesen erhält man, indem man eine Schnittpunktberechnung (d.h. Gleichsetzen der beiden Parametergleichungen) durchführt. Setzt man die Lösung des daraus entstehenden Gleichungssystems in eine der Parametergleichungen ein, so erhält man S

3. Lagebeziehung zwischen Ebenen

Gegeben seien zwei Ebenen zu

$$e_1: \vec{x} = \vec{x}_1 + l\vec{a} + m\vec{b}$$

$$e_2: \vec{x} = \vec{x}_2 + r\vec{c} + s\vec{d}$$

Um Rechenaufwand zu sparen, geht man zweckmäßigerweise so vor, daß man sofort versucht, eine Schnittgerade der beiden Ebenen zu bestimmen (durch Gleichsetzen der beiden Parametergleichungen). Setzt man die Lösungen des daraus entstehenden Gleichungssystems in eine der Parametergleichungen ein, so erhält man die Gleichung der Schnittgeraden. Erhält man im Gleichungssystem eine Widerspruch, sind die Ebenen parallel, erhält man eine allgemeingültige Lösung, so sind die Ebenen identisch.

Analytische Geometrie – Geraden und Ebenen

Aufgabe 1

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2:

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Bestimme die gegenseitige Lage der folgenden Geraden und Ebenen:

a) $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

c)

Aufgabe 3

Bestimme die gegenseitige Lage der folgenden Ebenen

a) $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

a) Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte P(4/0/2) und Q(3/1/1) in Parameterform und ermittle die Durchstoßpunkte mit den drei Koordinatenebenen.

b) Bestimme eine Gleichung der Geraden h durch den Punkt R(2/1/1) parallel zur Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Parameterform und untersuche die gegenseitige Lage von g und h.

Aufgabe 5

Untersuche, ob die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 ein Dreieck einschließen. Berechne gegebenenfalls die Eckpunkte. $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und der Ebene ε:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Ermittle die Schnittgeraden der Ebene zu $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den drei Koordinatenebenen.

Aufgabe 8

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Ebenen:

a) $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Ermittle eine Parametergleichung der Ebene ε durch die Punkte A(2/2/0), B(0/5/0), C(0/0/3).Untersuche dann die gegenseitige Lage von ε und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

a) Ermittle eine Parametergleichung der Ebene ε durch die drei Punkte A(6/6/0), B(0/10/0) und C(0/0/6)

b) Liegt der Punkt D(8/0/4) in der Ebene ε?

c) Untersuche die gegenseitige Lage von ε und der Geraden g zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Ermittle eine Parametergleichung für die Schnittgerade der Ebene ε mit der Ebene durch die Punkte A,B und D.

Aufgabe 11

Ermittle die Schnittgeraden der Ebene zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit den drei Koordinatenebenen.

Aufgabe 12

a) Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt $P_1(4/0/2)$ parallel zur Geraden $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Parameterform.

b) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε, in der g_1 und der Punkt $P_2(7/1/-1)$ liegt, in Parameterform.

Aufgabe 13

Trifft die Gerade g zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Fläche des Parallelogramms ABCD, das durch A(-2/-3/-4) und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ bestimmt ist?

Aufgabe 14

Gegeben seien drei Punkte A(2/2/-6), B(-2/2/0) und C(8/0/4). Bestimme eine Parametergleichung der Ebene ε durch A,B und C. Bringe die Ebenengleichung dann auf Normalenform.

Aufgabe 15

a) Zeige, dass die beiden Ebenen 1 zu x+y+1=0 und 2 zu x+y-z+3=0 zueinander orthogonal sind.
b) Ermittle eine Parametergleichung der Schnittgeraden g.
c) Zeige, dass P(-2/0/1) auf dieser Schnittgeraden liegt.

Aufgabe 16

Gegeben seien A(1/1/1), B(3/1/1), C(3/2/1), D(1/2/1), E(1/1/3).
a) Beweise: ABCD bilden eine Rechteck.
b) Ergänze ABCDE durch drei Punkte F,G,H zu einem Quader.
c) Zeige: g_{AD} und g_{EB} sind windschief.
d) Berechne Schnittmenge und Schnittwinkel der Ebene ε_1 durch ACD und ε_2 durch BDE.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Parametergleichungen folgender Ebenen und Geraden:

$$e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ k+6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass die beiden Ebenen parallel, aber nicht identisch sind.

b) Ermittle von beiden Ebenen jeweils die Hesse-Form und den Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems.

c) Welche zwei Möglichkeiten ergeben sich unter der Berücksichtigung der Ergebnisse aus a) und b) für den Abstand der beiden Ebenen voneinander? Gilt das Ergebnis auch für zwei beliebige, nicht parallel Ebenen? Begründe!

d) Berechne die Spurgerade (Schnittgerade) g_2 von ε_1 mit der x-y-Ebene. Bestimme den Abstand dieser Spurgeraden zum Ursprung des Koordinatensystems.

e) Bestimme die Gleichung einer zu ε_2 orthogonalen Geraden g_3 durch den Punkt P(-1/0/9).

f) Bestimme in der Geradengleichung g_k den Parameter k so, dass g_1 und g_k einen Schnittpunkt haben, berechne diesen Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Punkte A(2/-3/2), B(-1/3/6), C(5/-5/0), D(1/-4/3) und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Gib eine Parametergleichung der Ebene ε_1 durch A,B und C an.

b) Welchen Abstand hat der Punkt D von der Ebene ε_1.

c) Bestimme den Schnittpunkt S von g und ε_1.

d) Gib eine Parametergleichung der Ebene ε_2 an, die g enthält und durch D verläuft.